$\boxed{\textbf{SR6}}$ Dans tout ce problème, p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, et f_p est la fonction de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par $f_p(x) = x^p + px$.

1. Préciser les variations de la fonction f_p sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f_p est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à préciser.

Pour tout entier $p \geq 2$, montrer que l'équation $f_p(x) = 1$ a une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on notera α_p.

On a donc $\alpha_p^p + p\alpha_p = 1$ pour tout entier $p \geq 2$.

Soit g_p la bijection réciproque de f_p (i.e. $g_p = f_p^{-1}$).

2. Donner le tableau de variation de g_p sur $\mathbb{R}_+$, et des propriétés de g_p.

3. Montrer que g_p est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour $x \geq 0$, exprimer $g_p'(x)$ en fonction de $g_p(x)$.

4. Donner un équivalent simple de $f_p(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que $g_p(y) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[p]{y}$ (on pourra faire le changement de variable $y = f_p(x)$).

5. Montrer que pour tout entier $p \geq 2$ on a $\alpha_p < \frac{1}{p}$. Conclusion pour la suite (α_p) ?

6. Montrer que pour tout entier $p \geq 2$ et tout réel positif $x \in [0,1]$ on a

$$f_{p+1}(x) \geq f_p(x).$$

En déduire que la suite (α_p) est décroissante.

7. Montrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} \alpha_p^p = 0$ quand p tend vers $+\infty$.

En déduire que $\alpha_p \sim \frac{1}{p}$ quand p tend vers $+\infty$.

On veut améliorer le résultat précédent. Pour cela on pose $y_p = \alpha_p - \frac{1}{p}$ pour $p \geq 2$.

8. Montrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} p y_p = 0$.

Montrer de même que $\lim\limits_{p \to +\infty} p^2 y_p = 0$.

9. Montrer que $y_p = -\frac{e^{p \ln(p y_p + 1)}}{p^{p+1}}$ pour p entier ≥ 2.

En déduire que $y_p \sim -\frac{1}{p^{p+1}}$ puis que

$$\alpha_p = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^{p+1}} + o\left(\frac{1}{p^{p+1}}\right).$$

<u>*Correction*</u> : **1.** f_p est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car c'est la restriction d'une fonction polynôme) et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f_p'(x) = px^{p-1} + p > 0$. Donc f_p est strictement croissante; de plus elle est continue et $f_p(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f_p(x) = +\infty$, donc, d'après le théorème de la bijection, f_p est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Comme $1 \in \mathbb{R}_+$ alors l'équation $f_p(x) = 1$ a une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, α_p (l'unique antécédent de 1 par f_p).

2. D'après le théorème de la bijection, g_p est continue, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $f_p'(x) > 0$ donc g_p est dérivable sur $f_p(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

De plus : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+, f_p(g_p(x)) = x$, donc, en dérivant les deux membres on obtient : $f_p'(g_p(x)) \times g_p'(x) = 1$, d'où $g_p'(x) = \frac{1}{f_p'(g_p(x))}$, soit : $\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R}_+, g_p'(x) = \dfrac{1}{p g_p^{p-1}(x) + p}}$.

4. Pour $x > 0$ on a $\frac{f_p(x)}{x^p} = 1 + \frac{p}{x^{p-1}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $f_p(x) \underset{+\infty}{\sim} x^p$.

En posant $y = f_p(x)$ on a $x = f_p^{-1}(y) = g_p(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{f_p(x)}{x^p} = \frac{y}{g_p^p(y)} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, soit $\frac{g_p(y)}{\sqrt[p]{y}} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ c'est à dire $\boxed{g_p(y) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[p]{y}}$.

5. On a $p\alpha_p = 1-\alpha_p^p$ pour tout entier $p \geq 2$, donc $p\alpha_p < 1$ (car $\alpha_p^p > 0$) soit $\boxed{\forall p \geq 2, \alpha_p < \frac{1}{p}}$.

On a donc : $\forall p \geq 2, 0 \leq \alpha_p \leq \frac{1}{p}$ et d'après le théorème de l'étau $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty} \alpha_p = 0}$.

6. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $p \geq 2$ on a $f_{p+1}(x) - f_p(x) = x^{p+1} - x^p + x = x^{p+1} + x(1 - x^{p-1})$. Comme $x \in [0,1]$ on a $x^{p-1} \leq 1$ donc $1 - x^{p-1} \geq 0$ et $x^{p+1} \geq 0$ donc $f_{p+1}(x) - f_p(x) \geq 0$.

D'après 5/ on a $\alpha_p \in [0,1]$ pour $p \geq 2$ donc on peut remplacer x par α_p dans l'inégalité précédente soit : $f_{p+1}(\alpha_p) \geq f_p(\alpha_p) = 0$. Comme $f_{p+1}(\alpha_{p+1}) = 0$ on a donc $f_{p+1}(\alpha_p) \geq f_{p+1}(\alpha_{p+1})$. En prenant l'image des deux membres par f_{p+1}^{-1}, application strictement croissante d'après 2/, on obtient $\alpha_p \geq \alpha_{p+1}$ i.e. $\boxed{(\alpha_p) \text{ est décroissante}}$.

7. D'après 5/ on a $0 \leq \alpha_p \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$ pour $p \geq 2$, donc $0 \leq \alpha_p^p \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p$. Comme la suite $\left(\frac{1}{2}\right)^p$ tend vers 0 alors $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty} \alpha_p^p = 0}$ d'après le théorème de l'étau.

De la relation $\alpha_p^p + p\alpha_p = 1$ on déduit alors $\lim\limits_{p\to+\infty} p\alpha_p = 1$ soit $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{\alpha_p}{1/p} = 1$ ou $\boxed{\alpha_p \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{p}}$.

8. Pour $p \geq 2$ on a $py_p = p\left(\alpha_p - \frac{1}{p}\right) = p\alpha_p - 1 = -\alpha_p^p$ qui tend vers 0 (7/) donc $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty} py_p = 0}$.

De même $p^2 y_p = -p\alpha_p^p = -e^{p\ln\alpha_p + \ln p}$. or $p\ln\alpha_p + \ln p = p\left(\ln\alpha_p + \frac{\ln p}{p}\right)$. Comme $\frac{\ln p}{p}$ et α_p tendent vers 0 quand p tend vers $+\infty$ alors $\ln\alpha_p + \frac{\ln p}{p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $p\left(\ln\alpha_p + \frac{\ln p}{p}\right) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\boxed{py_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

9. Pour $p \geq 2$ on a $py_p = -\alpha_p^p = -\left(y_p + \frac{1}{p}\right)^p$ (car $\alpha_p = y_p + \frac{1}{p}$), donc $py_p = -\left(\frac{1+py_p}{p}\right)^p = -\frac{e^{p\ln(1+py_p)}}{p^p}$, soit $\boxed{y_p = -\frac{e^{p\ln(1+py_p)}}{p^{p+1}}}$.

D'après 8/ on a, quand p tend vers $+\infty$: $py_p \longrightarrow 0$ donc $\ln(1+py_p) \sim py_p$ et $p\ln(1+py_p) \sim p^2 y_p$ qui tend vers 0 (8/) donc $p\ln(1+py_p) \longrightarrow 0$ d'où $e^{p\ln(1+py_p)} \longrightarrow 1$ soit $e^{p\ln(1+py_p)} \sim 1$. On a donc $\boxed{y_p \sim -\frac{1}{p^{p+1}}}$.

C'est équivalent à l'existence d'une suite (ε_p) tendant vers 0 telle que $y_p = -\frac{1}{p^{p+1}}(1+\varepsilon_p)$, soit $\alpha_p - \frac{1}{p} = -\frac{1}{p^{p+1}} - \frac{\varepsilon_p}{p^{p+1}}$ ou $\boxed{\alpha_p = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^{p+1}} + o\left(\frac{1}{p^{p+1}}\right)}$.