$\boxed{\textbf{SR2}}$ On veut montrer qu'il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ dans l'intervalle $[0,1]$.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une bijection f de $\mathbb{N}$ dans l'intervalle $[0,1]$. On partage l'intervalle $[0,1]$ en trois segments de même longueur; l'un au moins de ces segments ne contient pas $f(0)$; on le note $[a_0, b_0]$. On partage l'intervalle $[a_0, b_0]$ en trois segments de même longueur; l'un au moins de ces segments ne contient pas $f(1)$; on le note $[a_1, b_1]$. On continue et on construit ainsi une suite de segments $[a_n, b_n]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \notin [a_n, b_n]$.

1. Calculer $b_n - a_n$.

2. Que peut-on dire des suites (a_n) et (b_n) et de $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$?[ex5.2016]

<u>*Correction*</u> : **1.** Par construction des segments $[a_n, b_n]$ on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{3}$, donc la suite $(b_n - a_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 - a_0 = \dfrac{1}{3}$. On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \dfrac{1}{3^{n+1}}}$.

2. Par construction des segments $[a_n, b_n]$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ donc la suite (a_n) est croissante, et (b_n) est décroissante. De plus et $b_n - a_n = \dfrac{1}{3^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Si α est leur limite commune on a $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\alpha\}$ (d'après le théorème des segments emboîtés).

Pour tout entier naturel n on a donc $\alpha \in [a_n, b_n]$.

Comme $[a_n, b_n]$ ne contient par $f(n)$ on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \neq \alpha.$$

Le réel $\alpha \in [0,1]$ n'a pas d'antécédent par f donc f n'est pas surjective d'où contradiction.

Conclusion : il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ *dans l'intervalle* $[0,1]$.