$\boxed{\textbf{SI2}}$ Soit la suite I_n définie par $I_n = \int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^n}$

1. Calculer I_1 et I_2. Démontrer que la suite (I_n) est convergente (on ne demande pas ici de trouver sa limite).

2. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$1 - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx.$$

En déduire que la limite de la suite (I_n).

3. Etablir que pour tout entier naturel n non nul on a

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx.$$

4. Montrer que pour tout réel positif ou nul on a : $\ln(1+u) \leq u$.

5. Déduire des questions précédentes que $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donner un équivalent de $1 - I_n$.[ex14.2010]

<u>*Correction*</u> : **1.** On a $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln|1+x|]_0^1$ donc $\boxed{I_1 = \ln 2}$ et $I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1$ soit $\boxed{I_2 = \frac{\pi}{4}}$.

Pour tout entier naturel non nul n et tout réel de l'intervalle $[0,1]$ on a $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$, donc $1 \leq 1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n$, d'où $\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+x^{n+1}} \leq 1$. En intégrant entre 0 et 1 on obtient : $I_n \leq I_{n+1} \leq 1$. La suite (I_n) est donc croissante. D'autre part elle est majorée par 1 donc elle est convergente.

2. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \int_0^1 \frac{1+x^n-1}{1+x^n} dx = \int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x^n} dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$ (par linéarité de l'intégrale) donc $\boxed{\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = 1 - I_n}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$ on a $0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$ (car $1 + x^n \geq 1$) donc, en intégrant entre 0 et 1 : $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, soit : $0 \leq 1 - I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Comme $\frac{1}{n+1}$ converge vers 0, on a, d'après le théorème de l'étau : $1 - I_n \longrightarrow 0$ soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1}$.

3. On intégre par parties $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ en posant $u = x$ et $v' = \frac{x^{n-1}}{1+x^n}$, $u' = 1$ et $v = \frac{\ln(1+x^n)}{n}$ (u et v étant de classe C^1 sur $[0,1]$) donc $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \left[x \frac{\ln(1+x^n)}{n}\right]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx$, soit $\boxed{\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx}$.

4. La fonction φ définie par $\varphi(u) = u - \ln(1+u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi'(u) = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u} \geq 0$ donc φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $\varphi(0) = 0$ on a : $\boxed{\forall u \geq 0, \ln(1+u) \leq u}$.

5. D'après 4/ : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], 0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$ (car $x^n \geq 0$), donc $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx \leq \int_0^1 x^n dx$, soit $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx \leq \frac{1}{n+1}$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx = 0$, donc $\frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

D'après la question 2/ et 3/ on a donc $1 - I_n = \frac{\ln 2}{n} - o\left(\frac{1}{n}\right)$, soit $\boxed{I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$.

D'autre part $n(1 - I_n) = \ln 2 - o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$, donc $n(1 - I_n) \sim \ln 2$, soit $\boxed{1 - I_n \sim \frac{\ln 2}{n}}$.