$\boxed{\textbf{SI1}}$ Pour tout entier naturel n on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}dx$.

1. Calculer u_1 et I_1.

2. Montrer que la suite (u_n) converge et trouver sa limite.

3. Quelle est le sens de variation de (u_n) ?

4. Ecrire une relation de récurrence très simple entre u_n, u_{n+2} et I_n.

5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2\,(n+1)}.$$

6. En intégrant I_n par parties montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_n = \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{u_{n+2}}{n+1}.$$

En déduire une relation entre u_n et u_{n+2}.

7. Déduire de la question précédente que, pour tout entier naturel n on a : $(2n+2)\,u_{n+2} \leq \sqrt{2}$.

8. Trouver un équivalent simple de u_n quand n tend vers l'infini.[ex18.2014]

Pour tout entier naturel non nul n on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}.$$

Correction : **1.** On a $u_1 = \int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$ (forme $u'u^{-1/2}$), soit $\boxed{u_1 = \sqrt{2}-1}$.

De même $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{3}\left[(1+x^2)^{3/2}\right]_0^1$ (forme $u'u^{1/2}$); soit $\boxed{I_1 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)}$.

2. Pour $x \in [0,1]$ on a : $1+x^2 \geq 1 \Longrightarrow \sqrt{1+x^2} \geq 1 \Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$. En multipliant par x^n et en intégrant entre 0 et 1 on obtient : $0 \leq u_n \leq \int_0^1 x^n dx$, soit $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. D'après le théorème de l'étau on a donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0}$.

3. Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $x^{n+1} \leq x^n$, donc $\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$. En intégrant entre 0 et 1 : $u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n + u_{n+2} = \int_0^1 \left(\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$ (linéarité de l'intégrale); soit $u_n + u_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}dx$, ou : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n + u_{n+2} = I_n}$.

5. Pour $x \in [0,1]$ on a : $1+x^2 \leq 2 \Longrightarrow \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En multipliant par x^n et en intégrant entre 0 et 1 on obtient : $u_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 x^n dx$, soit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2(n+1)}}$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$ on intègre $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}dx$ par parties en posant $u = \sqrt{1+x^2} \Longrightarrow u' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $v' = x^n$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, u et v étant de classe C^1 sur $[0,1]$. On obtient : $I_n = \left[\frac{x^{n+1}\sqrt{1+x^2}}{(n+1)}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1+x^2}}dx$, soit $\boxed{I_n = \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{u_{n+2}}{n+1}}$.

D'après la relation du 3/ on a donc : $u_n + u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{u_{n+2}}{n+1}$, soit $u_n + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$, donc, en multipliant par $n+1$: $\boxed{(n+1)\,u_n + (n+2)\,u_{n+2} = \sqrt{2}}$.

7. D'après 5/ on a $(n+2)\,u_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)\,u_n$ et d'après 4/ : $u_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)}$, donc $-(n+1)\,u_n \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$. On obtient : $(n+2)\,u_{n+2} \leq \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit $\boxed{(n+2)\,u_{n+2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

8. d'après la question précédente on a, pour $n \geq 2$: $nu_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n}$. D'après l'inégalité du 4/ on a donc :

$$\forall n \geq 2, \frac{\sqrt{2}}{2\,(n+1)} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n}.$$

On en déduit : $\forall n \geq 2$, $\frac{\sqrt{2}n}{2(n+1)} \leq nu_n \leq \frac{\sqrt{2}n}{2n}$. Comme les suites $\frac{\sqrt{2}n}{2(n+1)}$ et $\frac{\sqrt{2}n}{2n}$ convergent vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$ on a, d'après le théorème de l'étau $\lim nu_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ soit $\boxed{u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{2n}}$.