

PS7 Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x}}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Partie A : étude d'une fonction

1. Etudier la continuité et la dérivabilité à gauche et à droite en 0 de f .
2. Etudier les variations et les limites aux bornes de f .
3. Construire le graphique (C) de f .

Partie B : calcul d'une aire

4. Pour $h \in]0, 1[$ calculer l'aire $\mathcal{A}(h)$ de la région du plan comprise entre (C) , l'axe des réels et les deux droites d'équation $x = h$ et $x = 1$.

5. Calculer l'aire de la région du plan délimitée par (C) , la droite d'équation $x = 1$ et l'axe des ordonnées c'est à dire $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{A}(h)$.

Partie C : résolution d'une équation différentielle

6. Résoudre l'équation différentielle $x^2 y' + (2x - 1)y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
7. Existe-t-il des solutions dans $\mathbb{R}$?

Partie D : étude d'une famille de polynômes

8. Soit n un entier naturel. Montrer que f est n fois dérivable et qu'il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que :

$$\forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x) e^{-1/x}}{x^{2n+2}}, \text{ et } P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + [1 - 2(n+1)x] P_n(x) \quad (1).$$

9. Calculer P_i pour $0 \leq i \leq 3$.

10. Soit la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = x^2 f(x)$.

Montrer que : $\forall x > 0, g'(x) = f(x)$. En déduire que pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$ on a :

$$g^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x).$$

11. En utilisant la formule de Leibniz calculer pour n entier supérieur ou égal à 2 et tout réel $x > 0$, $g^{(n)}(x)$ en fonction de $f^{(n)}(x)$, $f^{(n-1)}(x)$ et $f^{(n-2)}(x)$.

Déduire des deux questions précédentes que pour tout entier naturel $n \geq 1$ et tout réel $x > 0$:

$$P_{n+1}(x) = [1 - 2(n+1)x] P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x).$$

12. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$ et tout réel $x > 0$:

$$P_n'(x) = -n(n+1) P_{n-1}(x) \quad (2).$$

Calculer le degré de P_n en fonction de n .

13. Déduire de (1) et de (2) que :

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, x^2 P_n'' + (1 - 2nx) P_n' + n(n+1) P_n = 0.$$

Partie E : étude d'un endomorphisme

Pour n entier naturel non nul on considère l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\varphi(P(X)) = X^2 P''(X) + (1 - 2nX) P'(X).$$

14. Montrer que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (que l'on continuera à noter φ).

(On admettra que φ est linéaire).

15. Montrer que la famille $B = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(les polynômes P_i sont ceux définis dans la partie D).

16. Trouver la matrice de φ dans la base B .

En déduire le rang, la dimension du noyau et le noyau de φ .

Corrigé :

Partie A : étude d'une fonction

1. Quand x tend vers 0^- , $e^{-1/x}$ tend vers $+\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$.

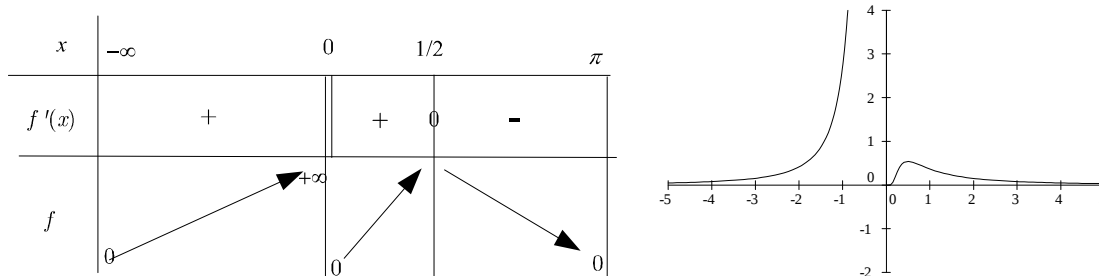
Pour la limite à droite en 0 on pose $X = -\frac{1}{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} X = -\infty$. Comme $f(x) = X^2 e^X$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} X^2 e^X = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

La fonction f n'est donc pas continue (donc pas dérivable) à gauche mais elle est continue à droite car $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Le taux de variation de f est $\tau = \frac{e^{-1/x}}{x^3} = X^3 e^X$ avec la notation précédente, qui tend vers 0 quand X tend vers 0^+ . La fonction f est donc dérivable à droite et $f'_d(0) = 0$.

2. Pour tout réel x non nul on a $f'(x) = \frac{e^{-1/x} \cdot x^2 - 2x e^{-1/x}}{x^4} = \frac{1-2x}{x^4} e^{-1/x}$, du signe de $1-2x$. En $\pm\infty$ la fonction $e^{-1/x}$ tend vers 1 donc $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

On en déduit le tableau de variation et le graphique de f .



Partie B : calcul d'une aire

4. On a $\mathcal{A}(h) = \int_h^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx = [e^{-1/x}]_h^1 = e^{-1} - e^{-1/h}$, donc $\boxed{\mathcal{A}(h) = e^{-1} - e^{-1/h}}$.

5. On a $\lim_{h \rightarrow 0^+} e^{-1/h} = 0$ donc l'aire de la région du plan délimitée par (C) , la droite d'équation $x = 1$ et l'axe des ordonnées est e^{-1} .

Partie C : résolution d'une équation différentielle

6. Sur $\mathbb{R}^*$ l'équation différentielle est équivalente à $y' + \frac{2x-1}{x^2} y = 0$. Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ les solutions sont $y(x) = C e^{-A(x)}$ avec $A(x) = \int \frac{2x-1}{x^2} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = 2 \ln|x| + \frac{1}{x}$.

On a donc $y(x) = C e^{-2 \ln|x| - \frac{1}{x}} = C \frac{e^{-1/x}}{x^2} = C f(x)$.

Les solutions l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^*$ sont donc $y(x) = \begin{cases} C f(x) & \text{si } x > 0 \\ C' f(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$, où C et C' sont deux constantes arbitraires.

7. Si $C' \neq 0$ alors $C'f(x)$ tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers 0^- . D'autre part $Cf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+ . On peut prolonger par continuité y en 0 (en posant $y(0) = 0$) ssi $C' = 0$.

Regardons si ce prolongement est dérivable en 0 : le taux d'accroissement de y en 0 est $Cf(x) = C\frac{e^{-1/x}}{x^2}$ pour $x > 0$ et 0 pour $x < 0$. Il tend donc vers 0 quand x tend vers 0. Le prolongement de y est donc dérivable et $y'(0) = 0$.

Enfin il est clair que cette fonction est solution de l'équation différentielle.

Conclusion : les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ sont :

$$y(x) = \begin{cases} Cf(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Partie D : étude d'une famille de polynômes

8. Soit la propriété P_n : " f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\exists P_n \in \mathbb{R}[X] / \forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^{-1/x}}{x^{2n+2}}$ et $P_{n+1}(x) = x^2 P'_n(x) + [1 - 2(n+1)x] P_n(x)$ ".

La propriété est vraie pour $n = 0$ avec $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = 1 - 2x$.

Supposons que P_n soit vraie pour un certain n . Alors $\forall x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^{-1/x}}{x^{2n+2}}$ donc f est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0, f^{(n+1)}(x) = \frac{(P_n(x)e^{-1/x})' x^{2n+2} - P_n(x)e^{-1/x} \cdot (2n+2)x^{2n+1}}{x^{4n+4}} = \frac{(P'_n(x)e^{-1/x} + \frac{P_n(x)}{x^2}e^{-1/x})x^{2n+2} - P_n(x)e^{-1/x} \cdot (2n+2)x^{2n+1}}{x^{4n+4}},$ soit $f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{P'_n(x)x^{2n+2} + P_n(x)x^{2n} - P_n(x)(2n+2)x^{2n+1}}{x^{4n+4}} \right) e^{-1/x} = \left(\frac{x^2 P'_n(x) + (1-2(n+1)x)P_n(x)}{x^{2n+4}} \right) e^{-1/x},$ de la forme $\frac{P_{n+1}(x)e^{-1/x}}{x^{2n+4}}$ avec $P_{n+1}(x) = x^2 P'_n(x) + (1 - 2(n+1)x) P_n(x)$.

La propriété est donc vraie pour $n+1$.

Elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

9. On a $P_0(x) = 1, P_1(x) = 1 - 2x$ et en utilisant la relation précédente on trouve facilement $P_2(x) = 6x^2 - 6x + 1, P_3(x) = -24x^3 + 36x^2 - 12x + 1$.

10. Pour tout réel $x > 0$ on a $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) = 2\frac{e^{-1/x}}{x} + x^2 \frac{1-2x}{x^4} e^{-1/x} = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = f(x)$.

Par une récurrence évidente on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)$.

11. On a, d'après la question précédente et la formule de Leibniz : $\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(x) = (x^2 f(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} f^{(n-k)}(x)$. Comme $(x^2)^{(k)} = 0$ pour $k \geq 3$ il ne reste dans la somme que les termes correspondant à $k = 0, 1, 2$, donc :

$$g^{(n)}(x) = x^2 f^{(n)}(x) + 2nx f^{(n-1)}(x) + n(n-1) f^{(n-2)}(x).$$

Comme $g^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)$ on en déduit que pour $x > 0$ et $n \geq 1$: $f^{(n)}(x) = x^2 f^{(n+1)}(x) + 2(n+1)x f^{(n)}(x) + n(n+1) f^{(n-1)}(x)$.

D'après 8/ cela s'écrit : $\frac{P_n(x)e^{-1/x}}{x^{2n+2}} = x^2 \frac{P_{n+1}(x)e^{-1/x}}{x^{2n+4}} + 2(n+1)x \frac{P_n(x)e^{-1/x}}{x^{2n+2}} + n(n+1) \frac{P_{n-1}(x)e^{-1/x}}{x^{2n}}$, soit $P_n(x) = P_{n+1}(x) + 2(n+1)x P_n(x) + n(n+1)x^2 P_{n-1}(x)$ ou encore :

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1}(x) = [1 - 2(n+1)x] P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x).$$

12. En reportant la relation précédente dans (1) on obtient : $-n(n+1)x^2 P_{n-1}(x) = x^2 P'_n(x)$, soit, pour tout réel $x > 0$ et tout entier $n \geq 1$, $P'_n(x) = -n(n+1) P_{n-1}(x)$.

Par une récurrence facile on en déduit que le degré de P_n est n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

13. En dérivant (1) on a : $P'_{n+1}(x) = 2xP'_n(x) + x^2P''_n(x) - 2(n+1)P_n(x) + [1 - 2(n+1)x]P'_n(x)$, soit $P'_{n+1}(x) = x^2P''_n(x) + [1 - 2nx]P'_n(x) - 2(n+1)P_n(x)$.

D'après la question précédente on a $P'_{n+1}(x) = -(n+1)(n+2)P_n(x)$, donc $-(n+1)(n+2)P_n(x) = x^2P''_n(x) + [1 - 2nx]P'_n(x) - 2(n+1)P_n(x)$ soit :

$$\boxed{\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, x^2P''_n + (1 - 2nx)P'_n + n(n+1)P_n = 0.}$$

Partie E : étude d'un endomorphisme

14. On voit facilement que φ est linéaire. D'autre part, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a $d^\circ(X^2P''(X)) \leq n$ et $d^\circ((1 - 2nX)P'_n(X)) \leq n$ donc $d^\circ(X^2P''(X) + (1 - 2nX)P'_n(X)) \leq n$ soit $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Conclusion : φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

15. La famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre car constituée de polynômes non nuls de degrés deux distincts; comme elle possède $n+1$ éléments c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (car $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$).

17. D'après la question 14/ on a, pour tout entier naturel n : $\varphi(P_n) = -n(n+1)P_n$.

La matrice de φ dans la base B est donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 \times 2 & & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -n(n+1) \end{pmatrix}.$$

On a immédiatement : $rg\varphi = rgM = n$.

D'après le théorème du rang on a donc $\dim \ker \varphi = 1$.

Comme $\mathbb{R}_0[X] \subset \ker \varphi$ et que $\dim \ker \varphi = 1$ on a donc $\boxed{\ker \varphi = \mathbb{R}_0[X]}$.