$\boxed{\textbf{PS4}}$ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on définit :

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \text{ et } g(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

Partie A - Généralités

1. Prouver que f et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $tf'(t) = g(t)$.

2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement (encore noté g) est dérivable en 0.

3. Faire un tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+$. Tracer son graphique (on donne $e^{-1} \simeq 0,36$).

Montrer que la restriction de g à l'intervalle $[0,1]$ est une bijection sur un intervalle à préciser et donner le tableau de variation de g^{-1}.

Mêmes questions pour la restriction de g à l'intervalle $[1,+\infty[$.

4. Soit H la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $t \longmapsto g(1/t)$ d'annulant en 1.

4. a. Calculer H.

4. b. En former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1.

5. Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$.
On considère l'équation (E_n) : $f(t) = \frac{t}{n}$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$.

5. a. En utilisant la question 3/ montrer que l'équation (E_n) a une unique solution dans l'intervalle $]0,1[$, que l'on notera α_n.

On montrerait de même (mais cela n'est pas demandé) que (E_n) a une unique solution dans l'intervalle $]1,+\infty[$, que l'on notera β_n.

5. b. Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ et $(\beta_n)_{n\geq 3}$ sont monotones.

5. c. Etudier les limites éventuelles des suites (α_n) et (β_n).

Partie B - Fonctions définies par une intégrale.

On prolonge maintenant f à $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$.

10. Montrer que l'application f ainsi prolongée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Préciser $f'(0)$ et montrer que l'égalité de la question 1/ reste valable pour $t = 0$.

11. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \text{ et } G(x) = \int_0^x g(t)\,dt.$$

11. a. Justifier l'existence de ces intégrales (*que l'on ne cherchera pas à calculer*) puis montrer que : $F(x) = xe^{-1/x} - G(x)$.

11. b. En séparant l'intégrale $G(x)$ en deux, montrer qu'il existe une constante C réelle telle que pour tout réel $x \geq 1$:

$$0 \leq G(x) \leq C + \ln(x).$$

11. c. En déduire que $G(x)$ est négligeable devant x au voisinage de $+\infty$ ainsi qu'un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

12. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E) : $x^2y' + y = x^2$ (l'expression générale de la solution devra faire apparaître F).

Partie C - Etude qualitative d'une équation différentielle.

On considère maintenant une application y solution de l'équation différentielle :

$$(E) : x^2y' + y = x^2$$

cette fois sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

Nous allons, *sans calcul explicite de* y, déterminer la suite des $u_n = y^{(n)}(0)$ à partir de l'équation (E).

13. Que vaut $u_0 = y(0)$?

14. En dérivant (E) calculer $u_1 = y'(0)$ et $u_2 = y''(0)$.

15. Peut-on avoir y de la forme : $x \longmapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$?

16. Soit n un entier naturel.

16. a. On suppose ici $n \geq 3$.

Prouver, à l'aide de la formule de Leibniz que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)\, y^{(n)}(x) + n(n-1)\, y^{(n-1)}(x) = 0.$$

En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$ on a la relation de récurrence :

$$u_n + n(n-1)\, u_{n-1} = 0.$$

16. b. Donner une expression de u_n utilisant une factorielle, valable pour $n \geq 2$; en déduire les développements limités (dont on justifiera l'existence) de y à l'ordre n au voisinage de 0.

Corrigé :

1. f et g sont de classe C^∞ comme composée et produit de fonctions C^∞ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f'(t) = \frac{e^{-1/t}}{t^2} = \frac{g(t)}{t}$.

2. $f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right)$ et $g(t) = \frac{f(t)}{t} = \frac{e^{-1/t}}{t}$. Posons $X = \frac{1}{t}$, donc $X \underset{t \longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(t) = Xe^{-X}$ qui tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$. Donc $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} g(t) = 0$ et g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

Le taux d'accroissement de g en 0 est $\tau = \frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \frac{e^{-1/t}}{t^2} = X^2e^{-X}$ qui tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$ donc $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \tau = 0$, i.e. g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

3. Pour $t > 0$ on a $g'(t) = \frac{tf'(t)-f(t)}{t^2} = \frac{g(t)-tg(t)}{t^2} = \frac{g(t)}{t^2}(1-t)$, du signe de $1-t$.

La fonction g est continue sur $[0,1]$ et strictement croissante donc elle induit une bijection de $[0,1]$ dans $g([0,1]) = [0, e^{-1}]$. g^{-1} est une bijection de $[0, e^{-1}]$ sur $[0,1]$ strictement croissante.

De même g induit une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]0, e^{-1}]$ et sa bijection réciproque est une bijection de $]0, e^{-1}]$ sur $[1, +\infty[$ strictement décroissante.

4. a. On a $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, g(1/t) = h(t) = te^{-t}$, que l'on intègre par parties en posant $\left\{\begin{array}{ll} u = t; & u' = 1 \\ v' = e^{-t}; & v = -e^{-t} \end{array}\right.$ (u et v étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$). D'où

$$H(x) = \int_1^x h(t)\,dt = \left[-te^{-t}\right]_1^x + \int_1^x e^{-t}dt = -xe^{-x} + e^{-1} - e^{-x} + e^{-1} = -(1+x)\,e^{-x} + 2e^{-1}.$$

4. b. On pose $x = 1+h$ et on a $H(x) = H(1+h) = -(2+h)\,e^{-1-h} + 2e^{-1}$, soit $H(1+h) = 2e^{-1}\left[1 - \left(1 + \frac{h}{2}\right)e^{-h}\right] = 2e^{-1}\left[1 - \left(1 + \frac{h}{2}\right)\left(1 - h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right)\right] = 2e^{-1}\left[\frac{h}{2} - \frac{h^3}{12} + o(h^3)\right]$.

Finalement : $\boxed{H(x) = e^{-1}\left[(x-1) - \frac{(x-1)^3}{6} + o(x-1)^3\right]}$.

5. a. (E_n) : $f(t) = \frac{t}{n}$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$.

L'équation est équivalente à $g(t) = \frac{1}{n}$. Comme $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{e}$ pour $n \geq 3$ et la restriction g_1 de g à $[0,1]$ étant une bijection sur $]0, e^{-1}[$ l'équation (E_n) a une unique solution α_n dans $]0,1[$. De plus $\alpha_n = g_1^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

5. b. Pour n entier ≥ 3 on a $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ donc $g_1^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq g_1^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ car g_1^{-1} est croissante de $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ dans $[0,1]$ (3/), donc $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ et la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

De même, g_2 étant la restriction de g à $[1, +\infty[$, g_2^{-1} est décroissante de $]0, e^{-1}]$ sur $[1, +\infty[$, la suite $(\beta_n)_{n\geq 3}$ est croissante.

5. c. Pour tout entier naturel $n \geq 3$ on a $\alpha_n = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$; or, d'après 3/, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} g_1^{-1}(x) = 0$ car g_1^{-1} est continue sur $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ et $g_1^{-1}(0) = 0$, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} g_1^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, soit $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} \alpha_n = 0$.

De même $\beta_n = g_2^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} g_2^{-1}(x) = +\infty$ (3/) donc $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} \beta_n = +\infty$.

Partie B - Fonctions définies par une intégrale.

6. On pose $X = \frac{1}{t}$, donc $X \underset{t\longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(t) = e^{-X}$ qui tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$ donc $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} f(t) = 0$. Pour $t > 0$ on a $f'(t) = \frac{g(t)}{t} = \frac{e^{-1/t}}{t^2} = X^2 e^{-X} \underset{X\longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il résulte du théorème limite-dérivée que f prolongée en 0 par 0 est dérivable en 0, que $f'(0) = 0$ et que f' est continue en 0.

D'après 1/ f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et l'égalité $tf'(t) = g(t)$ est valable en 0 car $g(0) = 0$).

7. a. Les fonction f et g étant continues sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0,x]$ pour $x > 0$ les intégrales définissant F et G existent.

On intègre F par parties, f étant de classe C^1 sur $[0,x]$, en posant $\begin{cases} u = f; & u' = f' \\ v' = 1; & v = t \end{cases}$ d'où :

$$F(x) = [tf(t)]_0^x - \int_0^x tf'(t)\,dt = xe^{-1/x} - \int_0^x g(t)\,dt,$$

car $tf'(t) = g(t)$ pour $t \geq 0$.

b. Pour $x \geq 1$ on écrit, d'après la relation de Chasles : $G(x) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt + \int_1^x g(t)\,dt$.

Pour $t \geq 1$ on a $0 < g(t) \leq \frac{1}{t}$ donc, pour $x \geq 1$, $G(x) \leq C + \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t} = C + \ln(x)$, en posant $C = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$. De plus, g étant ≥ 0 sur $\mathbb{R}$, on a $G(x) \geq 0$ et finalement :

$$\boxed{\forall x \geq 1, 0 \leq G(x) \leq C + \ln(x)}.$$

c. Pour $x \geq 1$ on a $0 \leq \frac{G(x)}{x} \leq \frac{C}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, donc $G(x) = o(x)$.

Pour $x > 0$ on a $\frac{F(x)}{x} = e^{-1/x} - \frac{G(x)}{x}$ (d'après 11. a.) qui tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$ donc on a $\boxed{F(x) \underset{+\infty}{\sim} x}$.

8. Pour $x > 0$ l'équation différentielle est équivalente à $y' + \frac{1}{x^2}y = 1$.

L'équation homogène $y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ a pour solutions $y(x) = Ce^{-\int \frac{dx}{x^2}} = Ce^{1/x}$.

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme $y(x) = C(x)\,e^{1/x}$ (méthode de variation de la constante), donc $y'(x) = C'(x)\,e^{1/x} + C(x)\left(e^{1/x}\right)'$.

En reportant dans l'équation on obtient : $C'(x)\,e^{1/x} + C(x)\left[\left(e^{1/x}\right)' + \frac{1}{x^2}e^{1/x}\right] = 1$. Le crochet est nul car $x \longmapsto e^{1/x}$ est solution de l'équation homogène et il reste $C'(x)\,e^{1/x} = 1$ soit $C'(x) = e^{-1/x}$.

On peut prendre $C(x) = F(x)$ et $F(x)\,e^{1/x}$ est une solution particulière de l'équation.

Finalement les solution de l'équation différentielle sont $\boxed{y(x) = (F(x) + C)\,e^{1/x}}$.

Partie C - Etude qualitative d'une équation différentielle.

9. En remplaçant x par 0 dans (E) on a $\boxed{u_0 = y(0) = 0}$.

10. En dérivant (E) on obtient : $2xy'(x) + x^2y"(x) + y'(x) = 2x$. En prenant $x = 0$, $\boxed{u_1 = y'(0) = 0}$.

En redérivant : $2y'(x) + 2xy"(x) + 2xy"(x) + x^2y'''(x) + y"(x) = 2$ et en prenant $x = 0$ $\boxed{u_2 = y"(0) = 2.}$

11. a. La formule de Leibniz donne pour tout entier naturel n :

$$\left(x^2y'(x)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^2\right)^{(k)} \left(y'(x)\right)^{n-k}.$$

Comme $\left(x^2\right)^{(k)} = 0$ pour $k \geq 3$ il reste, pour $n \geq 1$:

$$\left(x^2y'(x)\right)^{(n)} = x^2y^{(n+1)}(x) + 2nxy^{(n)}(x) + n(n-1)\,y^{(n-1)}.$$

En dérivant n fois les deux membres de (E) pour $n \geq 3$ on obtient : $x^2y^{(n+1)}(x) + 2nxy^{(n)}(x) + n(n-1)\,y^{(n-1)} + y^{(n)}(x) = 0$, soit

$$\boxed{x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)\,y^{(n)}(x) + n(n-1)\,y^{(n-1)}(x) = 0}.$$

En prenant $x = 0$ il vient, pour tout entier naturel $n \geq 3$, $y^{(n)}(0) + n(n-1)\,y^{(n-1)}(0) = 0$, soit :

$$\boxed{u_n + n(n-1)\,u_{n-1} = 0}$$

.

11.b. On écrit $u_k = -k(k-1)\,u_{k-1}$ pour $3 \leq k \leq n$ et on multiplie membre à membres et on obtient, après simplifications : $u_n = (-1)^{n-2}\,n!\,(n-1)!$ soit $\boxed{u_n = (-1)^n\,n!\,(n-1)!}$ (formule aussi valable pour $n = 2$).

y étant n fois dérivable en 0 elle admet un dl d'ordre n en 0 d'après le théorème de Taylor-Young donné par : $y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$ soit $\boxed{y(x) = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k\,(k-1)!x^k + o(x^n)}$ pour $n \geq 2$.