$\boxed{\text{PS2}}$ **Partie 1 : étude d'une fonction**

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}.$$

1. Etudier la continuité, dérivabilité et la parité de f.

2. Déterminer le developpement limité de f à l'ordre 6 en 0.

3. Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a

$$f(x) = 2\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

5. a. Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer la fonction g telle que $f'(x) = \frac{1}{x^2}g(x)$.

b. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$. On montrera que g' a le signe de $x(1-x^2)$ et que g s'annule en un unique point α de $\mathbb{R}_+^*$.

c. Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. Justifier que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle à préciser.

Partie 2 : calcul approché d'une intégrale

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$.

10. Justifier l'existence de I.

11. Pour $n \in \mathbb{N}$ et t réel calculer $1 - t^2 + t^4 \ldots + (-1)^n t^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}$.

En déduire que $\displaystyle\frac{2t}{1+t^2} - 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k+1} = \frac{2(-1)^{n+1} t^{2n+3}}{1+t^2}$.

12. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, $\displaystyle\left|\frac{\ln(1+x^2)}{x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k+1}\right| \leq \frac{x^{2n+3}}{n+2}$.

En déduire que $\displaystyle\left|I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2(k+1)^2}\right| \leq \frac{1}{2(n+2)^2}$.

A l'aide de la calculatrice trouver un entier n tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2(k+1)^2}$ soit une valeur approchée de I à 10^{-8} près.

Partie 3 : étude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle

$$x^2y" + 3xy' + y = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \quad (E)$$

13. Soient h et g deux fonctions deux fois dérivables telles que $h(x) = xg(x)$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $xh"(x) + h'(x) = x^2g"(x) + 3xg'(x) + g(x)$.

En déduire que g est solution de (E) ssi h' est solution de l'équation différentielle

$$xy' + y = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \quad (E')$$

14. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation (E').

15. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^*$.

Montrer que f est la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$.[ex17.2017]

Corrigé :

Partie 1 : étude d'une fonction

1. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient et composée de fonctions continues et dérivables.

On a immédiatement $f(-x) = -f(x)$ pour tout réel non nul donc f est impaire.

2. On a $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$ au voisinage de 0 donc $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$ soit $f(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} + o(x^6)$ ou $\boxed{f(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} + o(x^6)}$ (le terme en x^6 est nul car f est impaire).

3. D'après la question précédente f admet un dl en 0 à l'ordre 1 : $f(x) = x + o(x)$.

On a donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$: f est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Ce prolongement a pour dl en 0 : $f(x) = x + o(x^5)$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

4. Posons $h = \frac{1}{x}$, donc $h \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et on a $f(x) = h\ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) = h\ln\left(\frac{1+h^2}{h^2}\right) = h\ln(1+h^2) - 2h\ln h$.

On a $h\ln(1+h^2) = h^3 + o(h^3)$, donc $f(x) = -2h\ln h + h^3 + o(h^3)$, soit $f(x) = -2\frac{\ln(1/x)}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$, ou $\boxed{f(x) = 2\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)}$.

On en déduit que $\frac{f(x)}{2\ln(x)/2} = 1 + \frac{1}{2x^2\ln x} + o\left(\frac{1}{2x^2\ln x}\right)$ donc $\frac{f(x)}{2\ln(x)/2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ soit $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln x}{x}}$.

5. a. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $f'(x) = \frac{\frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{1}{x^2}g(x)$ avec $g(x) = \frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)$.

b. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{4x - 2x - 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$, du signe de $(1+x)(1-x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit le TV de g.

On a donc $g(x) > 0$ sur $]0,1]$ et comme g est continue et strictement croissante de $[1,+\infty[$ de $1 - \ln 2 > 0$ à $-\infty$ alors, d'après le théorème de la bijection, g s'annule exactement un fois en $\alpha > 1$.

c. On en déduit le TV de f sur $\mathbb{R}_+$.

x	0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0		$-$		
g	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
f	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

6. D'après le théorème de la bijection f (continue et strictement croissante sur $[0,1]$) est une bijection de $[0,1]$ sur $[f(0), f(1)] = [0, \ln 2]$.

Partie 2 : calcul approché d'une intégrale

10. I existe car la fonction f se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.

11. $1 - t^2 + t^4 \ldots + (-1)^n t^{2n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}$ est la somme d'une suite géométrique de raison $-t^2$ et de premier terme 1 donc $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1 - (-t^2) \times (-1)^n t^{2n}}{1+t^2} = \frac{1 + (-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$.

On a donc $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$ donc $\frac{2t}{1+t^2} - 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k+1} = \frac{2(-1)^{n+1} t^{2n+3}}{1+t^2}$.

12. Posons $\Psi(t) = \frac{2t}{1+t^2} - 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k+1} = \frac{2(-1)^{n+1} t^{2n+3}}{1+t^2}$. Par linéarité de l'intégrale on a, pour tout réel x : $\int_0^x \Psi(t)\,dt = \ln(1+x^2) - 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2k+2} = 2(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+3}}{1+t^2} dt$.

En prenant la valeur absolue des deux membre on en déduit, pour $x \geq 0$: $\left|\ln(1+x^2) - 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2k+2}\right.$ $2\int_0^x \frac{t^{2n+3}}{1+t^2} dt \leq 2\int_0^x t^{2n+3} dt$ (car $1+t^2 \geq 1$, soit $\left|\ln(1+x^2) - 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2k+2}\right| \leq \frac{2x^{2n+4}}{2n+4}$. En divisant par $x > 0$: $\left|\frac{\ln(1+x^2)}{x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k+1}\right| \leq \frac{x^{2n+3}}{n+2}$.

Posons $\Phi(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k+1}$. On a d'une part, par linéarité de l'intégrale : $\int_0^1 \Phi(x)\,dx = I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2(k+1)^2}$ et d'autre part $\left|\int_0^1 \Phi(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |\Phi(x)|\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{n+2} dx = \frac{1}{2(n+2)^2}$, donc $\boxed{\left|I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2(k+1)^2}\right| \leq \frac{1}{2(n+2)^2}}$.

Pour que $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2(k+1)^2}$ soit une valeur approchée de I à 10^{-8} près il suffit, d'après l'inégalité précédente, que $\frac{1}{2(n+2)^2} < 10^{-8}$ ce qui équivaut à $2(n+2)^2 > 10^8$, soit $n \geq 7070$ (à la calculatrice).

Partie 3 : étude d'une équation différentielle

13. On a $h'(x) = g(x) + xg'(x)$ et $h"(x) = 2g'(x) + xg"(x)$, donc $xh"(x) + h'(x) = 2xg'(x) + x^2 g"(x) + g(x) + xg'(x) = x^2 g"(x) + 3xg'(x) + g(x)$.

g est donc solution de (E) ssi $xh"(x) + h'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$ ssi h' solution de $xy' + y = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$ (E').

14. (E') est équivalente dans $\mathbb{R}^*$ à $y' + \frac{y}{x} = \frac{4}{(1+x^2)^2}$. Les solutions de l'équation homogène sont $y_H(x) = Ce^{-\ln x} = \frac{C}{x}$ (sur $\mathbb{R}_+^*$).

On cherche une solution particulière de la forme $y(x) = \frac{C(x)}{x}$ soit $y'(x) = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$. En reportant dans l'équation on obtient : $\frac{C'(x)}{x} = \frac{4}{(1+x^2)^2}$ soit $C'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$ de la forme $u'u^{-2}$ donc $C(x) = \frac{-2}{1+x^2}$.

Une solution particulière est donc $y(x) = \frac{-2}{x(1+x^2)}$ et les solutions de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ sont $\boxed{y(x) = \frac{C}{x} - \frac{2}{x(1+x^2)}}$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ les solutions sont $\boxed{y(x) = \frac{C'}{x} - \frac{2}{x(1+x^2)}}$.

15. D'après ce qui précède $g(x) = \frac{h(x)}{x}$ est solution de (E) ssi $h'(x) = \frac{C}{x} - \frac{2}{x(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En intégrant il vient $h(x) = C\ln x + A - 2\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$. On a $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ (écrire $1 = 1 + x^2 - x^2$!), donc $h(x) = C\ln x + A - 2\ln x + \ln(1+x^2) = \alpha \ln x + A + \ln(1+x^2)$ soit $g(x) = \alpha \frac{\ln x}{x} + \frac{A}{x} + \frac{\ln(1+x^2)}{x}$.

Sur $\mathbb{R}_-^*$ on a de même $h(x) = \alpha' \frac{\ln|x|}{x} + \frac{A'}{x} + \frac{\ln(1+x^2)}{x}$.

Si g est une solution sur $\mathbb{R}$ elle se prolonge par continuité en 0 : ce la n'est possible que si $\alpha = \alpha' = A = A' = 0$ (car $\alpha \frac{\ln x}{x} + \frac{A}{x}$ tend vers $\pm\infty$ en 0 si $(\alpha, A) \neq (0,0)$ et de même $\alpha' \frac{\ln|x|}{x} + \frac{A'}{x}$

si $(\alpha', A') \neq (0,0)$). Donc $g = f$ et f est la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$.