On admet qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout réel $\theta \in]0, \pi[$

$$\sin[(n+1)\theta] = \sin(\theta) P_n(\cos\theta) \quad \textbf{(*)}$$

1. En utilisant la relation $\sin[(n+1)t] + \sin[(n-1)t] = 2\sin(nt)\cos(t)$ valable pour tout réel t et tout entier naturel n montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} + P_{n-1} = 2XP_n.$$

Calculer P_0, P_1 et P_2. Calculer le degré et le terme de plus haut degré de P_n.

2. En dérivant deux fois la relation (*) montrer que pour tout entier naturel n

$$\left(n^2 + 2n\right) P_n = 3XP_n'(X) + \left(X^2 - 1\right) P_n''.$$

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 on considère Φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P) = 3XP'(X) + \left(X^2 - 1\right) P''.$$

3. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer le degré de $\Phi(X^p)$. En déduire le degré de $\Phi(P)$ en fonction du degré de P pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

4. Montrer que Φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (que l'on continuera à noter Φ).

5. Calculer le rang de Φ et trouver une base de $\operatorname{Im}\Phi$. Que peut-on dire de Φ ?

6. A l'aide des questions précédentes calculer $\ker\Phi$ et sa dimension.

7. Montrer que la famille de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ecrire la matrice de Φ dans cette base.

Corrigé :

1. Pour tout réel $\theta \in]0, \pi[$ et n entier ≥ 2 on a $\sin[(n+1)\theta] + \sin[(n-1)\theta] = \sin(\theta) P_n(\cos\theta) + \sin(\theta) P_{n-2}(\cos\theta)$ d'après (*) et d'autre part $\sin[(n+1)\theta] + \sin[(n-1)\theta] = 2\sin(n\theta)\cos(\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta) P_{n-1}(\cos\theta)$, donc $P_n(\cos\theta) + P_{n-2}(\cos\theta) = 2\cos(\theta) P_n(\cos\theta)$. Les polynômes $P_n + P_{n-2}$ et $2XP_n$ prennent les mêmes valeurs en une infinité de points (les réels de l'intervalle $]-1, 1[$) donc ils sont égaux, soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, P_{n+1} + P_{n-1} = 2XP_n.$$

On a $P_0 = 1$ et comme $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ on a $P_1 = 2X$. La relation précédente, pour $n = 1$ donne alors $P_2 = 4X^2 - 1$.

Soit la propriété $\mathcal{P}_n$"le terme de plus haut degré de P_n est $2^n X^n$".

La propriété est vraie au rang $n = 0$ et $n = 1$.

Supposons la vraie jusqu'au rang n ("récurrence forte"). La relation $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$ et l'hypothèse de récurrence montre que le terme de plus degré de P_{n+1} s'obtient en multipliant celui de P_n par $2X$, c'est donc $2^{n+1}X^n$. La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion : la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. En dérivant la relation (*) par rapport à θ on obtient

$$(n+1)\cos[(n+1)\theta] = \cos(\theta) P_n(\cos\theta) - \sin^2(\theta) P_n'(\cos\theta),$$

et en redérivant

$$-(n+1)^2 \sin[(n+1)\theta] = -\sin(\theta) P_n(\cos\theta) - 3\cos(\theta)\sin(\theta) P_n'(\cos\theta) + \sin^3(\theta) P_n''(\cos\theta),$$

donc $-(n+1)^2\sin(\theta)P_n(\cos\theta) = -\sin(\theta)P_n(\cos\theta) - 3\cos(\theta)\sin(\theta)P_n^{'}(\cos\theta) + \sin^3(\theta)P_n^{''}(\cos\theta)$.

En simplifiant par $\sin(\theta)$ ($\neq 0$) on obtient $-(n+1)^2 P_n(\cos\theta) = -P_n(\cos\theta) - 3\cos(\theta)P_n^{'}(\cos\theta) + \sin^2(\theta)P_n^{''}(\cos\theta)$, soit $(n^2+2n)P_n(\cos\theta) = 3\cos(\theta)P_n^{'}(\cos\theta) + (\cos^2(\theta)-1)P_n^{''}(\cos\theta)$.

Les polynômes $(n^2+2n)P_n$ et $3XP_n^{'} + (X^2-1)P_n^{''}$ coïcident en une infinité de points (ceux de l'intervalle $]-1,1[$) donc ils sont égaux, soit

$$\left(n^2+2n\right)P_n = 3XP_n^{'}(X) + \left(X^2-1\right)P_n^{''}.$$

3. Pour $p \geq 2$ on a $\Phi(X^p) = p(p+2)X^p - p(p-1)X^{p-2}$, $\Phi(1) = 0$ et $\Phi(X) = 3X$. Donc $\mathrm{d}^\circ\Phi(X^p) = p$ si $p \geq 1$ et $\mathrm{d}^\circ\Phi(X^p) = -\infty$ si $p \leq 0$.

Si $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^p$ est un polynôme de degré p tel que $1 \leq p \leq n$ (donc $a_p \neq 0$) on a $\Phi(P) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k \Phi(X^p)$ par linéarité de Φ, donc $\Phi(P)$ est de degré p d'après le résultat précédent. Si $\mathrm{d}^\circ P \leq 0$ on a $\Phi(P) = 0$. Finalement $\boxed{\mathrm{d}^\circ\Phi(P) = \mathrm{d}^\circ P \text{ si } \mathrm{d}^\circ P \geq 1 \text{ et } \mathrm{d}^\circ\Phi(P) = -\infty \text{ si } \mathrm{d}^\circ P \leq 0}$.

4. On voit facilement que Φ est linéaire et si $\mathrm{d}^\circ P \leq n$ alors $\mathrm{d}^\circ\varphi(P) \leq n$ d'après la question précédente, donc Φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. On a $\mathrm{rg}(\Phi) = \mathrm{rg}(\Phi(1), \Phi(X), \dots, \Phi(X^n)) = \mathrm{rg}(\Phi(X), \dots, \Phi(X^n))$ (car $\Phi(1) = 0$) donc $\mathrm{rg}(\Phi) = n$ car le système, constitué de polynômes non nuls de degré 2 à 2 distinct, est libre.

Une base de l'image est donc $(\Phi(X), \dots, \Phi(X^n))$. Comme $\mathrm{rg}(\Phi) \neq n+1$ ($= \dim\mathbb{R}_n[X]$), Φ n'est ni injective ni bijective.

6. D'après le théorème du rang on a $\dim\mathbb{R}_n[X] = \dim\ker\Phi + \mathrm{rg}\Phi$, donc $\dim\ker\Phi = n+1-n = 1$.

D'autre part pour tout polynôme constant P on a $\Phi(P) = 0$ donc $\mathbb{R} \subset \ker\Phi$. Comme les deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}_0[X]$ et $\ker\Phi$ ont même dimension (1) ils sont égaux donc $\boxed{\ker\Phi = \mathbb{R}}$.

7. La famille de polynômes $(P_0, P_1, \dots, P_n)$, constituée de polynômes non nuls de degré 2 à 2 distinct, est libre. Comme elle est de cardinal $n+1$ et $\dim\mathbb{R}_n[X] = n+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

D'après la question 2/ on a $\Phi(P_k) = k(k+2)P_k$ pour $k \in \mathbb{N}$. La matrice de Φ dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est donc la matrice diagonale dont la diagonale est $0, 3, \dots, n(n+2)$.