$\boxed{\textbf{P1}}$ Soit un entier $N \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant : A tire simultanément et de manière équiprobable deux entiers distincts entre $-N$ et N. Il choisit alors un de ces deux nombres (avec probabilité $1/2$ et de manière indépendante de son tirage) et le donne à B. Celui-ci doit alors deviner s'il s'agit du nombre le plus grand ou le plus petit que A a choisi.

Le but de l'exercice est de déterminer une stratégie permettant à B de gagner le plus souvent possible.

1. Donner un univers Ω associé au tirage des deux entiers par A et calculer son cardinal.

Montrer que la probabilité d'obtenir deux entiers donnés est $\frac{1}{(2N+1)N}$.

La première stratégie de B (stratégie 1) est de toujours répondre qu'il s'agit du minimum quel que soit le nombre que lui annonce A.

2. Calculer la probabilité de l'événement $S_1 =$"B gagne en utilisant la stratégie 1".

B décide de suivre la stratégie 2 suivante :

- si le nombre donné par A est strictement positif, il répond qu'il s'agit du maximum;
- si le nombre donné par A est strictement négatif, il répond qu'il s'agit du minimum;
- si le nombre donné par A est 0, il répond minimum ou maximum avec probabilité $1/2$.

Soient les événements :

T_{++} : les deux nombres tirés par A sont strictement positifs;

T_{--} : les deux nombres tirés par A sont strictement négatifs;

T_{+-} : un des deux nombres tirés par A est strictement positif et l'autre strictement négatif;

T_0 : un des nombres tirés par A est nul.

3. Montrer que $P(T_{++}) = \dfrac{N-1}{4N+2}$.

4. Calculer $P(T_{--}), P(T_{+-})$ et $P(T_0)$.

5. Montrer que la probabilité qu'a B de gagner sachant T_0 est égale à $\frac{3}{4}$.

6. En déduire la probabilité de l'événement $S_2 =$"B gagne en utilisant la stratégie 2".

Quelle est la meilleurs stratégie ?

Calculer la limite de $P(S_2)$ quand N tend vers $+\infty$.[ex19.2017]

Correction :

1. L'univers est l'ensemble des 2-combinaisons des $2N+1$ entiers de l'intervalle $\{-N, \ldots, N\}$. Le cardinal de Ω est $\binom{2N+1}{2} = \frac{(2N+1)2N}{2} = N(2N+1)$.

Le tirage des deux entiers étant équiprobable la probabilité d'obtenir deux entiers donnés est donc $\frac{1}{\binom{2N+1}{2}}$ ("nombre de cas favorables sur nombre cas possibles") soit $\frac{1}{(2N+1)N}$.

2. Avec la stratégie 1, B a deux choix dont un seul est gagnant, donc la probabilité de gagner dans ce cas est $\frac{1}{2}$.

3. Le nombre de façons de tirer deux nombres strictements positifs parmi $\{1, 2, \ldots, N\}$ est $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$ donc $P(T_{++}) = \frac{\binom{N}{2}}{\binom{2N+1}{2}} = \frac{N(N-1)}{2N(2N+1)}$ soit $\boxed{P(T_{++}) = \frac{N-1}{4N+2}}$.

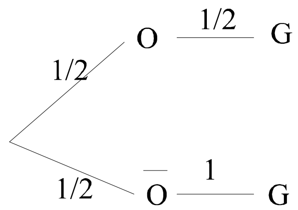
4. De la même façon on a $P(T_{--}) = \frac{N-1}{4N+2}$ (il y a N nombres entiers strictements négatifs).

Le nombre de façons de tirer un nombre strictement positif est N et celui de tirer un nombre strictement négatif est N donc il y a N^2 façons de tirer un nombre strictement positif et un nombre strictement négatif d'où $P(T_{+-}) = \frac{N^2}{\binom{2N+1}{2}} = \frac{2N^2}{2N(2N+1)}$ soit $\boxed{P(T_{+-}) = \frac{N}{2N+1}}$.

Il y a $2N$ façons de tirer un nombre non nul donc il y a $2N$ façons de tirer deux entiers dans $\{-N, \ldots, N\}$ dont un est nul d'où $P(T_0) = \frac{2N}{\binom{2N+1}{2}} = \frac{4N}{2N(2N+1)}$ soit $\boxed{P(T_0) = \frac{2}{2N+1}}$.

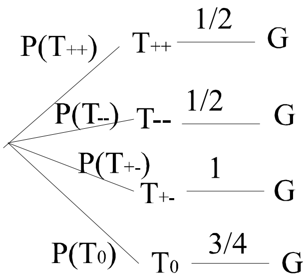
5. Si A tire un 0 il y a deux cas : soit il annonce "0" à B et celui-ci a une chance sur 2 de gagner, soit il annonce l'autre nombre choisi et alors B gagne à coup sûr (car si le nombre choisi par A est > 0 B annonce que c'est le maximum et s'il est < 0 il annonce que c'est le minimum).

Le système d'événements $(0, \overline{0})$ étant complet, on a, d'après la formule des probabilités totales : $P_{T_0}(G) = P(0) \times P_0(G) + P\left(\overline{0}\right) \times P_{\overline{0}}(G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{4}$.



6. Le système d'événements $(T_{++}, T_{--}, T_{+-}, T_0)$ étant complet, on a, d'après la formule des probabilités totales : $P(S_2) = P(T_{++}) \times P_{T_{++}}(S_2) + P(T_{--}) \times P_{T_{--}}(S_2) + P(T_{+-}) \times P_{T_{+-}}(S_2) + P(T_0) \times P_{T_0}(S_2)$.

On a $P_{T_{++}}(S_2) = P_{T_{--}}(S_2) = \frac{1}{2}$ et $P_{T_{+-}}(S_2) = 1$ donc $P(S_2) = \frac{N-1}{4N+2} \times \frac{1}{2} + \frac{N-1}{4N+2} \times \frac{1}{2} + \frac{N}{2N+1} \times 1 + \frac{2}{2N+1} \times \frac{3}{4}$ d'où $\boxed{P(S_2) = \frac{3N+2}{2(2N+1)}}$.



Pour tout N on a $\frac{3N+2}{2(2N+1)} > \frac{1}{2}$ donc la deuxième stratégie est meilleure.

Quand N tend vers l'infini, $P(S_2)$ tend vers $\frac{3}{4}$.