NR4 Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ majorée et M sa borne supérieure.

1. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers M .

(*Indication* : utiliser la propriété de la borne supérieure du cours en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$).

2. Soit μ un majorant de A . On suppose qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle qui converge vers μ . Montrer que $\mu = \sup A$.

3. Soit B une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. On pose

$$A + B = \{a + b/a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Montrer que $A + B$ est majoré et, en utilisant les questions précédentes, que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Correction : 1. D'après la propriété de la borne supérieure on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A/M - \varepsilon \leq x \leq M.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et on obtient : $\exists x_n \in A/M - \frac{1}{n} \leq x_n \leq M$.

(x_n) est donc une suite de A qui converge vers M (d'après le théorème de l'étau).

2. Comme μ est un majorant de A on a $\mu \geq M$ (car $M = \sup A$ est le plus petit des majorants).

D'autre part, d'après 1/, il existe une suite (x_n) de A convergeant vers μ . On a, pour tout entier naturel n , $x_n \leq \mu$ (car μ est un majorant de A). En passant cette inégalité à la limite on obtient $M \leq \mu$.

Finalement $\mu = M$.

Autre façon : si $\mu > M$, comme (x_n) converge vers μ on a $M < x_n \leq \mu$ pour n assez grand (prendre $\varepsilon = M - \mu$ dans la définition de la limite de la suite (x_n)). Cela contredit que M est un majorant de A . On a donc $\mu \leq M$ et comme $\mu \geq M$ on obtient $\mu \geq M = M$.

3. Pour $(a, b) \in A \times B$ on a $a \leq \sup A$ et $b \leq \sup B$ donc $a + b \leq \sup A + \sup B$. L'ensemble $A + B$ est donc majoré par $\sup A + \sup B$.

D'après 1/ il existe une suite (a_n) de A et une suite (b_n) de B telles que $\lim a_n = \sup A$ et $\lim b_n = \sup B$. Donc $\lim (a_n + b_n) = \sup A + \sup B$.

La suite $(a_n + b_n)$ est donc une suite de $A + B$ qui converge vers $\sup A + \sup B$, majorant de $A + B$. D'après 2/ on a donc $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$.