$\boxed{\textbf{NR3}}$ **1.** Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

2. Montrer par récurrence que pour tous réel $a_1,a_2,...,a_n$ strictements positifs et tout entier naturel $n\geq 1$ on a :

$$(a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2. \quad \text{[ex2.2017]}$$

Correction : **1.** Pour tout réel $x>0$ on a $x+\frac{1}{x}\geq 2 \Longleftrightarrow x+\frac{1}{x}-2\geq 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$, inégalité vraie.

Conclusion : $\boxed{\forall x>0, x+\frac{1}{x}\geq 2}$.

Remarque : on peut aussi étudier la fonction f définie par $f(x)=x+\frac{1}{x}$ pour $x>0$.

2. Soit la propriété $P(n)$: "pour tout $a_1,a_2,...,a_n>0, (a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2$".

La propriété est vraie pour $n=1$ ($\forall a_1>0, a_1\times\frac{1}{a_1}=1$).

Supposons la propriété vraie pour un entier n fixé. Soient des réels $n+1$ réels $a_1,a_2,...,a_{n+1}>0$. On a :

$$(a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1})\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=(a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)+\frac{a_1}{a_{n+1}}+\frac{a_2}{a_{n+1}}+...+\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}+\frac{a_{n+1}}{a_2}+...+\frac{a_{n+1}}{a_n}+1.$$

D'après l'hypothèse de récurrence on a $(a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2$.

D'autre part on a $\frac{a_1}{a_{n+1}}+\frac{a_2}{a_{n+1}}+...+\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}+\frac{a_{n+1}}{a_2}+...+\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{a_1}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_2}\right)+...+\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. D'après la question 1/ chaque parenthèse est ≥ 2 (car de la forme $x+\frac{1}{x}$ avec $x>0$) donc cette somme de n termes est $\geq 2n$.

On obtient donc : $(a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1})\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\geq n^2+2n+1=(n+1)^2$, donc la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.