NR2 1. Pour n entier naturel supérieur ou égal à 1 et pour x réel appartenant à $]0; 1[$

montrer que :

$1 - x^n \leq n(1 - x)$ de trois façons :

a/ en étudiant une fonction;

b/ en utilisant, après l'avoir justifiée, la formule : $1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$;

c/ par récurrence sur n ;

2. Dédurre de la question précédente que pour tous réels a et b strictement positifs tels que $a \leq b$ et tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 on a :

$$b^n - a^n \leq n(b - a)b^{n-1}.$$

Correction : 1. a/ Soit la fonction f définie par $f(x) = n(1 - x) - (1 - x^n) = x^n - nx + n - 1$

pour $x \in]0; 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. f est dérivable sur $]0; 1[$ (fonction polynôme) et $\forall x \in]0; 1[$, $f'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$. Pour $x \in]0; 1[$ on a $x^{n-1} \leq 1$, donc on a $f'(x) \leq 0$. La fonction f est donc décroissante sur $]0; 1[$ et comme $f(1) = 0$ on a $\forall x \in]0; 1[$, $f(x) \geq 0$, soit :

$$\forall x \in]0; 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - x^n \leq n(1 - x).$$

b/ Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x distinct de 1 on a : $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x \cdot x^{n-1}}{1 - x} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison x), donc $1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$.

D'autre part on a : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]0; 1[, x^k \leq 1$. En sommant ces inégalités de $k = 0$ à $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on obtient $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} \leq n$. En multipliant les deux membres par $1 - x$ (> 0) on obtient $(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})(1 - x) \leq n(1 - x)$, soit $1 - x^n \leq n(1 - x)$, d'après la relation précédente.

c/ Soit la propriété P_n : " $\forall x \in]0; 1[, 1 - x^n \leq n(1 - x)$ ".

Initialisation : P_1 s'écrit $\forall x \in]0; 1[, 1 - x \leq 1 - x$ qui est vraie.

Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain entier naturel n : $1 - x^n \leq n(1 - x)$

(H). Montrons que P_{n+1} est vraie.

On écrit : $1 - x^{n+1} = x(1 - x^n) - x + 1$. D'après (H) on a $1 - x^n \leq n(1 - x)$ donc $x(1 - x^n) \leq nx(1 - x)$ (car $x > 0$) $\leq n(1 - x)$ (car $x \leq 1$). En ajoutant $-x + 1$ il vient $x(1 - x^n) - x + 1 \leq n(1 - x) - x + 1$, soit $x(1 - x^n) - x + 1 \leq (n + 1)(1 - x)$. On a donc $1 - x^{n+1} \leq (n + 1)(1 - x)$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

2. En divisant par b^n (strictement positif) l'inégalité à démontrer est équivalente à : $1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n \leq \frac{n(b-a)b^{n-1}}{b^n}$ soit $1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n \leq n\frac{(b-a)}{b}$ ou encore $1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n \leq n\left(1 - \frac{a}{b}\right)$. C'est l'inégalité obtenue à la première question en posant $x = \frac{a}{b}$ (ce qui est possible car $0 < a \leq b \implies \frac{a}{b} \in]0; 1[$).