NR1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\frac{x+5}{2x-1}+\frac{2x-1}{x+5}>2$;

2. $x-\sqrt{2x+7}>4$;

3. Préciser le signe de m^2+2m-3 en fonction du paramètre m.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(m+1)^2\,x>4x+3m+1$ (d'inconnue x).

Correction : **1.** Domaine de définition : $D=\mathbb{R}-\{-5;1/2\}$. Pour tout x réel on a :

$$\frac{x+5}{2x-1}+\frac{2x-1}{x+5}>2 \iff \frac{x+5}{2x-1}+\frac{2x-1}{x+5}-2>0 \iff \frac{(x+5)^2+(2x-1)^2-2(x+5)(2x-1)}{(x+5)(2x-1)}>0 \iff \frac{x^2-12x+36}{(x+5)(2x-1)}>0$$

$$\iff \frac{(x-6)^2}{(x+5)(2x-1)}>0.$$

On a le tableau de signe :

x		-5		1/2		6	
x+ 5	-	0	+		+	0	+
2x - 1	-		-	0	+		+
(x - 6)^2	+		+		+	0	+
Q	+	||	-	||	+	0	-

On a donc $S=\left]-\infty;-5\right[\cup\left]\frac{1}{2};6\right[\cup\left]6;+\infty\right[$.

2. *Domaine de définition* : on doit avoir $2x+7\geq 0$ soit $x\geq -\frac{7}{2}$, donc $D=\left[-\frac{7}{2};+\infty\right[$.

L'inéquation est équivalente à : $\sqrt{2x+7}<x-4$.

Opérons par disjonction des cas :

* Si $x\leq 4$ alors $x-4$ est négatif ou nul et $\sqrt{2x+7}$ est positif ou nul. Dans ce cas l'inéquation est impossible.

* Si $x>4$ les deux membres de l'inéquation sont positifs, et l'inéquation est équivalente à celle obtenue en élevant au carré les deux membres. On a donc (pour $x\in D$ et $x>4$) :

$\sqrt{2x+7}<x-4 \iff 2x+7<(x-4)^2 \iff 2x+7<x^2-8x+16 \iff x^2-10x+9>0.$

Les solution du trinôme $x^2-10x+9$ sont 1 et 9. Il est >0 pour $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]9;+\infty\right[$.

Les solutions de l'inéquation sont les réels x tels que $x\in D$ et $x>4$ et $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]9;+\infty\right[$.

Finalement $\boxed{S=\left]9;+\infty\right[}$.

3. Le trinôme m^2+2m-3 a pour solutions 1 ou -3. Il est négatif ou nul ssi $x\in[-3;1]$.

On a : $(m+1)^2\,x>4x+3m+1 \iff (m^2+2m+1)\,x>4x+3m+1$

$\iff (m^2+2m-3)\,x>3m+1$.

Si $m=-3$: c'est équivalent à $0.x>-8$, vérifiée pour tout x, donc $S=\mathbb{R}$;

Si $m=1$: c'est équivalent à $0.x>4$, impossible, donc $S=\varnothing$;

Si $m\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ alors $m^2+2m-3>0$ et l'inéquation est équivalente à $x>\dfrac{3m+1}{m^2+2m-3}$, donc $S=\left]\frac{3m+1}{m^2+2m-3};+\infty\right[$;

Si $m\in\left]-3;1\right[$ alors $m^2+2m-3<0$ et l'inéquation est équivalente à $x<\dfrac{3m+1}{m^2+2m-3}$ donc $S=\left]-\infty;\frac{3m+1}{m^2+2m-3}\right[$.

NR1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\frac{x+5}{2x-1}+\frac{2x-1}{x+5}>2$;

2. $x-\sqrt{2x+7}>4$;

3. Préciser le signe de m^2+2m-3 en fonction du paramètre m.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(m+1)^2 x > 4x + 3m + 1$ (d'inconnue x). [ex1.2007] $\boxed{\text{III}}$ **1.** On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 1$. Comme la suit (x_n) est à termes > 0 on en déduit que (x_n) *est strictement croissante.*

2. Pour tout réel $x \geq 0$ on a $1 + x \geq 1$ donc $\ln(1+x) \geq \ln 1$(car ln croissante sur $\mathbb{R}_+^*$) soit $\ln(1+x) \geq 0$.

D'autre part considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \ln(1+x) - x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (composée de fonctions dérivables) et $f'x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{x+1}$. On a donc $f'(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus $f(0) = 0$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq 0$, ce qui donne $\ln(1+x) \leq x$ pour tout réel $x \geq 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq \ln(1+x) \leq x}$.

3. Pour tout entier naturel non nul n on a : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$), d'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} \leq 1}$.

4. D'après la question 2/ on a, pour tout entier naturel k (en remplaçant x par $\frac{1}{2^k}$), $0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$. En sommant ces inégalités de $k = 1$ à n on obtient : $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}$. Or $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = \ln \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = \ln x_n$.

D'après 3. on obtient : $\forall n \geq 1, \ln x_n \leq 1$, soit $x_n \leq e$ (car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$).

La suite (x_n) est donc majorée. D'après 1. elle est croissante donc *la suite* (x_n) *est convergente.*