Point de Torricelli ou de Fermat d un triangle : étant donné un triangle $ABC$, le problème est de trouver un point $M$ du plan qui minimise la somme des distances $MA+MB+MC$ de $M$ aux points $A$, $B$ et $C$ en utilisant les nombres complexes.

L'existence de ce point tire son origine d'un problème que Fermat posa à Torricelli (d'où les différentes appellations). Torricelli résolut ce problème d'une manière similaire à celle de Fermat, à l'aide des cercles circonscrits aux triangles équilatéraux issus des côtés du triangle initial, ces cercles sont les cercles de Torricelli. La démonstration fut rapportée par Viviani, pupille de Torricelli, en 1659.

Soient donc trois points non alignés $A, B, C$ et un point $O$ tel que :

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ (2\pi).$$

On se place dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, et on note $a$, $b$ et $c$ les affixes des points $A$, et $C$.

**1.** Soient $A_1$, $B_1$, et $C_1$ les points d'affixes $a_1 = \frac{a}{|a|}$, $b_1 = \frac{b}{|b|}$, $c_1 = \frac{c}{|c|}$.

Montrer que $A_1B_1C_1$ est un triangle équilatéral de centre $O$ et que l'on a : $a_1 + b_1 + c_1 = 0$.

**2.** Soit $M$ un point d'affixe $z$. On pose :

$$S_1 = |z-a| + |z-b| + |z-c| \text{ et } S_2 = \left|\overline{a_1}\,(z-a) + \overline{b_1}\,(z-b) + \overline{c_1}\,(z-c)\right|.$$

**a.** Montrer que $S_2 = |a| + |b| + |c|$.

**b.** Montrer que $S_2 \leq S_1$.

En déduire une solution du problème et la valeur du minimum de $MA + MB + MC$.

**3.** On s'intéresse à la réciproque.

**a.** Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes non nuls. Montrer que :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Longleftrightarrow z_1 \text{ et } z_2 \text{ ont même argument.}$$

**b.** Soient $n$ nombres complexes tous non nuls $z_1, \ldots, z_n$. Montrer par récurrence sur $n$ que :

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| \Longleftrightarrow z_1, z_2, \ldots, z_n \text{ ont même argument.}$$

**c.** En déduire que le point $M$ d'affixe $z$ vérifie : $|z-a|+|z-b|+|z-c| = |a|+|b|+|c||$ (i.e. $M$ est solution du problème) ssi :

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ (2\pi). \qquad (1)$$

**4.** On construit à l'extérieur du triangle $ABC$ les triangles équilatéraux $AIB, BJC$ et $CKA$.

Montrer que les cercles circonscrits à ces trois triangles sont concourants en un point $M$ vérifiant la relation (1) ($M$ est donc la solution du problème) (utiliser le théorème de cocyclicité).

*Corrigé :*

**1.** On a $\overrightarrow{OA} = |a|\,\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB} = |b|\,\overrightarrow{OB_1}$ et $\overrightarrow{OC} = |c|\,\overrightarrow{OC_1}$ donc $\left(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\ (2\pi)$, $\left(\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OC_1}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)\ (2\pi)$ et $\left(\overrightarrow{OC_1}, \overrightarrow{OA_1}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right)\ (2\pi)$ donc $\left(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OC_1}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OC_1}, \overrightarrow{OA_1}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$. De plus $OA_1 = OB_1 = OC_1 = 1$, donc par la rotation de centre $O$

et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ on a donc $A_1 \longmapsto B_1$, $B_1 \longmapsto C_1$ et $C_1 \longmapsto A_1$. Comme une rotation est une isométrie on a donc $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$. Le triangle $A_1B_1C_1$ est donc équilatéral.

*Autre solution* : $O$ est le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$. D'après le théorème de l'angle au centre on a $\left(\overrightarrow{C_1A_1}, \overrightarrow{C_1B_1}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}\right) \equiv \left(\overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{B_1A_1}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,(\pi)$ d'où le résultat.

D'autre part $O$ est le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$ donc c'est aussi son centre de gravité (car ce triangle est équilatéral), donc $z_O = \frac{a_1+b_1+c_1}{3} = 0$, d'où $\boxed{a_1 + b_1 + c_1 = 0}$.

**2. a.** On a $S_2 = \left|\left(\overline{a_1} + \overline{b_1} + \overline{c_1}\right) z - \left(\overline{a_1}a + \overline{b_1}b + \overline{c_1}c\right)\right|$. Or $\overline{a_1} + \overline{b_1} + \overline{c_1} = \overline{a_1 + b_1 + c_1} = 0$ et $\overline{a_1}a = \frac{a\overline{a}}{|a|} = \frac{|a|^2}{|a|} = |a|$ et de même $\overline{b_1}b = |b|$ et $\overline{c_1}c = |c|$, d'où $\boxed{S_2 = |a| + |b| + |c|}$.

**2. b.** D'après l'inégalité triangulaire on a : $S_2 \leq |\overline{a_1}\,(z-a)| + \left|\overline{b_1}\,(z-b)\right| + |\overline{c_1}\,(z-c)|$, soit $S_2 \leq |z-a| + |z-b| + |z-c|$, car $|a_1| = |b_1| = |c_1| = 1$.

D'après 1/ a/ cette inégalité s'écrit : $|a| + |b| + |c| \leq |z-a| + |z-b| + |z-c|$.

Pour tout point $M$ du plan d'affixe $z$ cette inégalité se traduit par : $OA + OB + OC \leq MA + MB + MC$, donc le point $O$ est une solution du problème.

La valeur minimale de $MA+MB+MC$ quand $M$ est dans le plan est donc $OA+OB+OC = |a| + |b| + |c|$.

**3. a.** On procède par équivalences : $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Longleftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$ $\Longleftrightarrow (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1|\,.\,|z_2|$ soit : $|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1|\,.\,|z_2|$, ou encore : $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 2\,|z_1|\,.\,|z_2|$, ce qui s'écrit : $2\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) = 2\,|z_1|\,.\,|z_2|$, soit $\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) = |z_1|\,.\,|z_2|$.

Posons $z_1 = r_1e^{i\alpha}$ et $z_2 = r_2e^{i\beta}$ avec $r_1$ et $r_2 > 0$. L'égalité précédente est équivalente à

Re $\left(r_1r_2e^{i(\alpha-\beta)}\right) = r_1r_2$, soit $e^{i(\alpha-\beta)} = 1$ ou encore à $\cos(\alpha-\beta) = 1$ soit $\alpha - \beta \equiv 0\,(2\pi)$, i.e. $z_1$ et $z_2$ ont même argument.

**3. b.** On raisonne par récurrence sur $n$. Soit la propriété :

$P(n)$ : "$\forall\,(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{*n}, |z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots |z_n| \Longleftrightarrow z_1, \ldots, z_n$ ont même argument").

La propriété $P(2)$ est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$ d'après la question précédente.

Supposons la propriété vraie au rang $n$ et soient $n+1$ nombres complexes non nuls $z_1, \ldots, z_{n+1}$ tels que $|z_1 + \ldots + z_{n+1}| = |z_1| + \ldots |z_{n+1}|$. D'après l'inégalité triangulaire on peut écrire :

$$|z_1 + \ldots + z_{n+1}| \leq |z_1 + \ldots + z_n| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \ldots |z_{n+1}|\,.$$

Comme le premier et le troisième membre de ces inégalités sont égaux, les trois membres le sont.

L'égalité des deux premiers membres donne $z_1 + \ldots + z_{n+1}$ et $z_{n+1}$ on même argument (car $P(2)$ est vraie), et l'égalité du deuxième et troisième membre donne $|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots |z_n|$, donc $z_1$, $z_2, \ldots, z_n$ ont même argument (hypothèse de récurrence). Posons $z_k = r_ke^{i\alpha}$ $(r_k > 0)$ pour $1 \leq k \leq n$. On a $z_1 + \ldots + z_n = (r_1 + \cdots r_n)\,e^{i\alpha}$ donc $z_{n+1}$ a aussi $\alpha$ pour argument. Ainsi $z_1, \ldots, z_{n+1}$ ont tous même argument $\alpha$. Réciproquement si $z_1, \ldots, z_{n+1}$ ont même argument on voit facilement que $|z_1 + \ldots + z_{n+1}| = |z_1| + \ldots |z_{n+1}|$. La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.

*Conclusion* : $P(n)$ est vraie pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1.

**3. c.** Si $M$ vérifie $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}$ $(2\pi)$ alors $M$ est solution du problème d'après les questions précédentes donc $MA + MB + MC = |a| + |b| + |c|$ (2/b/) soit $|z-a| + |z-b| + |z-c| = |a| + |b| + |c|$.

Réciproquement si $z$ vérifie : $|z-a|+|z-b|+|z-c|=|a|+|b|+|c|$ on a $|z-a|+|z-b|+|z-c|=\left|\overline{a_1}(z-a)+\overline{b_1}(z-b)+\overline{c_1}(z-c)\right|$(d'après 2/ a/) ce qui s'écrit aussi $|\overline{a_1}(z-a)|+\left|\overline{b_1}(z-b)\right|+|\overline{c_1}(z-c)|=\left|\overline{a_1}(z-a)+\overline{b_1}(z-b)+\overline{c_1}(z-c)\right|$ (car $|\overline{a_1}|=\left|\overline{b_1}\right|=|\overline{c_1}|$). D'après la question précédente cela équivaut à $\arg(\overline{a_1}(z-a))\equiv\arg\left(\overline{b_1}(z-b)\right)\equiv\arg(\overline{c_1}(z-c))\,(2\pi)$.

On a donc $\arg\overline{a_1}+\arg(z-a)\equiv\arg\overline{b_1}+\arg(z-b)\,(2\pi)$ donc $\arg(z-b)-\arg(z-a)\equiv\arg\overline{a_1}-\arg\overline{b_1}\,(2\pi)\equiv-\arg\frac{\overline{b_1}}{\overline{a_1}}\equiv\arg\frac{b_1}{a_1}\,(2\pi)$ (car $\arg\overline{z}\equiv-\arg z$) d'où $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)\equiv\arg\frac{b_1}{a_1}\,(2\pi)$, ce qui s'écrit : $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OB_1}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\,(2\pi)$, ou $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\,(2\pi)$.

De même on démontre que $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.

**4.** D'après 4/ c/ on a $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\,(2\pi)$ , donc $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}\,(\pi)$ $(\frac{2\pi}{3}-\pi=-\frac{\pi}{3})$. Comme $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}\,(\pi)$ on a $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)(\pi)$ donc les points $O$, $A$, $B$, $I$ sont cocycliques ou alignés. Comme $O$, $A$ et $B$ ne sont pas alignés alors $O$, $A$, $B$, $I$ sont cocycliques.

De même les points $O$, $B$, $C$, $J$ et $O$, $C$, $A$, $K$ sont cocycliques.

*Remarque* : réciproquement on admet que si les trois cercles circonscrits aux triangles $AIB$, $BJC$ et $CKA$ sont concourants en un point intérieur au triangle $ABC$ (ce qui est le cas si ses angles sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$) ce point minimise la distance $MA+MB+MC$.