$\boxed{\textbf{NC1}}$ Soit P le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

On considère l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 2z(1-z)$.

On désigne par F l'application de P dans P qui au point $M(z)$ d'affixe z associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = f(z)$ (autrement dit f est l'écriture complexe de F).

1. Quels sont les points invariants par F ?

2. Quels sont les points ayant pour image le point A d'affixe -4 ?

Quels sont les points ayant pour image le point B d'affixe $2+2i$?

3. Etudier l'injectivité et la surjectivité de F.

4. Soient M_1 et M_2 deux points du plan d'affixes respectives z_1 et z_2, $z_1 \neq z_2$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z_1 et z_2, pour que $F(M_1) = F(M_2)$. Interpréter géométriquement cette condition par rapport au segment $[M_1M_2]$.

5. Soit Ω le point d'affixe $1/2$. En utilisant la relation $z' - \frac{1}{2} = -2\left(z - \frac{1}{2}\right)^2$ (où $z' = f(z)$) montrer que $\Omega M' = 2\Omega M^2$ (avec $M' = F(M)$) et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{\Omega M}\right) + \pi \ \ (2\pi)$.

Faire un schéma expliquant la construction du point M' à partir du point M.

6. Soit D_1 l'axe des x.

Déterminer $F(D_1)$ et $F^{-1}(D_1)$.

7. Soit C le cercle trigonométrique. Déterminer une équation paramétrique de $F(C)$.

<u>*Corrigé*</u> : **1.** $M(z)$ est invariant ssi $f(z) = z$ soit $2z(1-z) = z$, qui équivaut à $2z^2 - z = 0$ dont les solutions sont 0 ou $1/2$. Les deux points invariants sont donc O et $\Omega(1/2)$.

2. $M(z)$ a pour image $A(-4)$ ssi $f(z) = -4$ sii $2z(1-z) = -4$ ssi $z^2 - z - 2 = 0$. $z = -1$ est racine évidente et l'autre vaut donc 2. Les points ayant pour image A sont donc $M_1(-1)$ et $M_2(2)$.

3. D'après 2/ le point $A(4)$ a deux antécédents donc F n'est pas injective.

Un équation du second degré dans $\mathbb{C}$ ayant au moins une solution, tout complexe a un antécédent, donc tout point M du plan a un antécédent par F i.e. F est surjective.

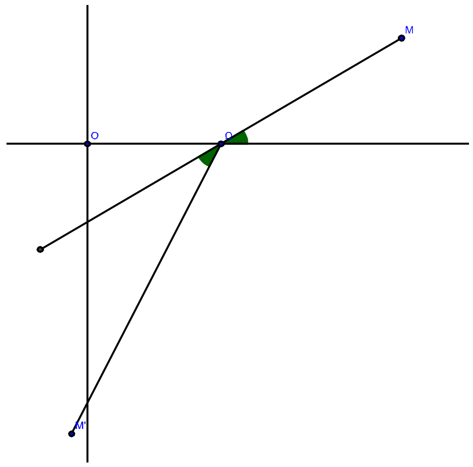
4. On a $F(M_1) = F(M_2)$ ssi $f(z_1) = f(z_2)$ ssi $-2z_1^2 + 2z_1 = -2z_2^2 + 2z_2$ ssi $(z_1^2 - z_2^2) - (z_1 - z_2) = 0$ ssi $(z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 1) = 0$. Comme $z_1 \neq z_2$ cette équation est équivalente à $z_1 + z_2 = 1$, ou encore $\frac{z_1+z_2}{2} = 1$.

Interprétation géométrique : le milieu du segment $[M_1M_2]$ est le point d'affixe $1/2$, i.e. le point Ω.

5. En prenant le module des deux membres de $z' - \frac{1}{2} = -2\left(z - \frac{1}{2}\right)^2$ on obtient $\left|z' - \frac{1}{2}\right| = 2\left|z - \frac{1}{2}\right|^2$ soit $\boxed{\Omega M' = 2\Omega M^2}$.

De $z' - \frac{1}{2} = -2\left(z - \frac{1}{2}\right)^2$ on obtient, pour $z \neq \frac{1}{2}$: $\frac{z' - \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}} = -2\left(z - \frac{1}{2}\right)$, et en passant à l'argument : $\arg\left(\frac{z'-\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}\right) \equiv \arg\left[-2\left(z - \frac{1}{2}\right)^2\right] (2\pi)$, soit $\arg\left(\frac{z'-\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}\right) \equiv \arg(-2) + \arg\left[\left(z - \frac{1}{2}\right)\right] (2\pi)$, ou $\boxed{\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{\Omega M}\right) (2\pi)}$.

D'où la construction de M' à partir de M.



6. $F(D_1)$ est l'ensemble des points du plan d'affixe $f(x) = -2x^2 + 2x$. Une rapide étude de f sur $\mathbb{R}$ montre que $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1/2]$, donc $F(D_1)$ est l'axe des réels inférieurs ou égaux à $1/2$.

On a $M \in F^{-1}(D_1) \Longleftrightarrow F(M) \in D_1 \Longleftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$, où z est l'affixe du point M.

Or $f(z) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow f(z) = \overline{f(z)} \Longleftrightarrow 2z^2 - z = 2\overline{z}^2 - \overline{z} \Longleftrightarrow (z - \overline{z})(z + \overline{z} - 1) = 0$, ce qui équivaut à $z = \overline{z}$ ou $z + \overline{z} = 1$, soit $z \in \mathbb{R}$ ou $\mathrm{Re}(z) = 1/2$. $F^{-1}(D_1)$ est donc la réunion de l'axe des x et de la droite d'équation $x = 1/2$.

7. $F(C)$ est l'ensemble des points du plan d'affixe $f(e^{it}) = 2e^{it} - 2e^{2it} = 2(\cos t - \cos 2t) + 2i(\sin t - \sin 2t)$.

$F(C)$ est donc l'ensemble des points du plan d'équations paramétriques :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x & = \cos t - \cos 2t \\ y & = \sin t - \sin 2t \end{array} \right. .$$