$\boxed{\textbf{G2}}$ *Points équidistants de deux droites dans l'espace*

Partie 1.

Soit D une droite de l'espace passant par une point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Soit M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur D.

On appelle distance de M à la droite D le réel $d(M, D) = MH$.

1. Montrer que pour tout point N de D on a : $MN \geq MH$.

2. Montrer que $d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$.

(*Indication* : on pourra écrire autrement $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}$).

3. Déterminer la distance du point $M \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$ à la droite D définie par $\begin{array}{c} x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 1 \end{array}$.

Partie 2.

Soient D et D' deux droites de l'espace non coplanaires de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ unitaires (c'est à dire : $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$) et $\theta \in]0, \pi[$ l'angle (géométrique) de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On note :

* Δ la perpendiculaire commune de D et D';
* H et H' l'intersection de Δ avec D et D' respectivement;
* O le milieu de $[HH']$.

4. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

On pose $\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|}$, $\overrightarrow{j} = \frac{\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}$.

5. Montrer $R = \left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

6. a. En developpant $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2$ et $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2$ montrer que $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = 2\sin\frac{\theta}{2}$.

Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ dans le repère $R = \left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$?

b. En déduire que les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le repère R sont $\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \\ 0 \end{pmatrix}$ respectivement.

7. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{OH} = a\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{OH'} = -a\overrightarrow{k}$.

8. Soit M de coordonnées x, y, z.

a. Exprimer $d(M, D)$ et $d(M, D')$ en fonction de x, y, z et θ.

b. En déduire $d(M, D) = d(M, D') \iff xy\sin\theta + 2az = 0$.

Cette dernière équation est une équation cartésienne de l'ensemble Σ des points équidistants des droites D et D'.

9. Pour $h \in \mathbb{R}$ on note Π_h le plan d'équation $z = h$.

a. A quelle condition un point M de Π_h de coordonnées x, y, h appartient-il à Σ ?

b. En déduire la nature de la courbe intersection de Σ et de Π_h.

Corrigé :

Partie 1

1. Le triangle NHM étant rectangle en H on a : $MN^2 = MH^2 + HN^2$ (Pythagore), donc $MN^2 \geq MH^2$, soit $MN \geq MH$.

2. On écrit : $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u}$. Comme $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires (car A et H appartiennent à D) on a $\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, donc $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u}$. En prenant la norme des deux membres on obtient : $\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM}\right\| \times \left\|\overrightarrow{u}\right\|$ (car $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux), d'où $\left\|\overrightarrow{HM}\right\| = \boxed{d(M, D) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|}}$.

3. Le système est équivalent à $\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 3x &= 2 \end{cases}$ (en ajoutant les deux équations). En prenant $z = t$ comme paramètre on obtient : $\begin{cases} x &= 2/3 \\ y &= 1/3 - t \\ z &= t \end{cases}$. D'où $A(2/3, 1/3, 0) \in D$ et $\overrightarrow{u}(0, -1, 1)$ est un vecteur directeur de D. On obtient $\overrightarrow{AM}(1/3, 5/3, 3)$ et $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}(14/3, -1/3, -1/3)$. On a donc $\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{22}$ et $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{2}$ d'où $\boxed{d(M, D) = \sqrt{11}}$.

Partie 2.

4. On a $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 = 0$ (car $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$), donc $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

5. Les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux (car colinéaires à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$) et de norme 1. Donc le repère $R = \left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

6. a. On a $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2 + 2\cos\theta$ (car $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$), soit $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = 2(1 + \cos\theta)$. D'autre part $\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$, donc $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$, et $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = 4\cos^2\frac{\theta}{2}$, soit $\boxed{\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = 2\cos\frac{\theta}{2}}$ (car $\theta \in \left]0, \pi\right[\implies \cos\frac{\theta}{2} > 0$).

De même $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2(1 - \cos\theta)$ et $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, donc $\boxed{\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = 2\sin\frac{\theta}{2}}$.

Il en résulte que les coordonnées de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ dans le repère $R = \left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ sont respectivement $\left(2\cos\frac{\theta}{2}, 0, 0\right)$ et $\left(0, 2\sin\frac{\theta}{2}, 0\right)$.

b. On écrit : $\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})\right]$ donc $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, 0\right)$ dans le repère R.

De même $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})\right]$ donc $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\left(\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}, 0\right)$ dans le repère R.

7. O et H appartiennent à Δ, donc $\overrightarrow{OH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{k}$: $\exists a \in \mathbb{R} / \overrightarrow{OH} = a\overrightarrow{k}$. Comme O est le milieu de $[HH']$ on a $\overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{OH'}$, donc $\overrightarrow{OH'} = -a\overrightarrow{k}$.

Enfin a est non nul sinon $O = H = H'$. Les droites D et D' auraient le point O en commun, donc seraient coplanaires.

8. a. Puisque $\overrightarrow{u}$ est de norme 1 on a, d'après 2/, $d(M, D) = \left\|\overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|$. Comme H a pour coordonnée $(0, 0, a)$ dans le repère on a $\overrightarrow{HM}(x, y, z - a)$ et $\overrightarrow{u}\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, 0\right)$, donc $\overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\left(-(z - a)\sin\frac{\theta}{2}, (z - a)\cos\frac{\theta}{2}, x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2}\right)$.

D'où $\boxed{d(M, D) = \sqrt{(z - a)^2 + \left(x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}}$.

De même H' a pour coordonnée $(0, 0, -a)$ donc $\overrightarrow{H'M}(x, y, z + a)$ et $\overrightarrow{H'M} \wedge \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\left((z + a)\sin\frac{\theta}{2}, (z + a)\cos\frac{\theta}{2}, -x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2}\right)$.

D'où $\boxed{d\left(M,D'\right)=\left\|\overrightarrow{H'M}\wedge\overrightarrow{v}\right\|=\sqrt{(z+a)^2+\left(x\sin\frac{\theta}{2}+y\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}}$.

b. D'après la question précédente on a : $d\left(M,D\right)=d\left(M,D'\right)\iff(z-a)^2+\left(x\sin\frac{\theta}{2}-y\cos\frac{\theta}{2}\right)^2=(z+a)^2+\left(x\sin\frac{\theta}{2}+y\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$, qui équivaut à $4az+4xy\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0$. Comme $2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\sin\theta$ on obtient : $\boxed{2az+xy\sin\theta=0}$.

9. a. b. On a $M\in\Pi_h\cap\Sigma\iff(z=h \text{ et } 2ah+xy\sin\theta=0)$. Dans le plan Π_h c'est l'hyperbole d'équation $xy=-\frac{2ah}{\sin\theta}$ (ou $y=-\frac{2ah}{x\sin\theta}$).