$\boxed{\textbf{FI2}}$ Soit f l'application définie sur $D = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln|t|}.$$

1. Justifier que f est définie sur D.

2. Montrer que f est impaire.

3. Montrer que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$.

Donner le tableau de variation de f sur $D \cap \mathbb{R}_+$ (on ne cherchera pas à calculer les limites aux bornes de D).

4. a. Montrer que pour tout réel x de l'ensemble $\left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ on a

$$\frac{x}{\ln(2x)} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln(x)}.$$

b. En déduire les limites de $f(x)$ quand x tend vers 0 et vers plus l'infini.

Préciser la nature de la branche infinie quand au voisinage de $+\infty$.

c. Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable ?

5. Soit l'application h de $\left]0, 1\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(t) = \ln(t) - 2t + 2$.

a. Montrer qu'il existe un réel α appartenant à $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ tels que $h(\alpha) = 0$.

Montrer que : $\forall t \in [\alpha, 1], \ln(t) \geq 2t - 2$.

b. En déduire la limite de f quand x tend vers $1/2$.

6. En utilisant l'inégalité $\ln(t) \leq t - 1$ valable pour tout $t > 0$, calculer la limite de f quand x tend vers 1.

7. Donner l'allure du graphique de f.

Correction : **1.** Soit $\varphi : t \longmapsto \dfrac{1}{\ln|t|}$. Si $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ on a $2x < 1$ donc $[x, 2x] \subset \left]0, 1\right[$. Comme φ est continue sur $\left]0, 1\right[$ alors elle est continue sur $[x, 2x]$ donc $f(x)$ existe. Si $x > 1$ alors $[x, 2x] \subset \left]1, +\infty\right[$. Comme φ est continue sur $\left]1, +\infty\right[$ alors elle est continue sur $[x, 2x]$ donc $f(x)$ existe. f est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.

De même on montre que f est continue sur $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

2. Soit $x \in D$. Dans l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln|t|}$ on pose $u = -t$, donc $du = -dt$; bornes : quand $t = x$ on a $u = -x$ et quand $t = 2x$, $u = -2x$, donc $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{-du}{\ln|-u|} = -\int_{-x}^{-2x} \frac{du}{\ln|u|} = -f(-x)$.

Conclusion : f est impaire.

3. φ étant continue sur D elle y admet une primitive Φ. Pour $x \in D$ on a $f(x) = [\Phi(t)]_x^{2x} = \Phi(2x) - \Phi(x)$. Comme Φ est dérivable sur D alors f est dérivable sur D comme somme et composée de fonctions dérivables et $f'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x)$, soit $f'(x) = \dfrac{2}{\ln|2x|} - \dfrac{1}{\ln|x|} = \dfrac{2\ln|x| - \ln|2x|}{\ln|2x| . \ln|x|}$. Comme $\ln|2x| = \ln|x| + \ln 2$, on a : $\boxed{\forall x \in D, f'(x) = \dfrac{\ln|x| - \ln 2}{\ln|2x| . \ln|x|}}$.

$f'(x)$ est du signe de $\ln|x| - \ln 2$.

4. a. Pour $x \in D \cap \mathbb{R}_+$, on a $x \leq t \leq 2x \Longrightarrow \ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(2x)$, donc $\dfrac{1}{\ln(2x)} \leq \dfrac{1}{\ln(t)} \leq \dfrac{1}{\ln(2x)}$ (la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$). En intégrant entre x et $2x$ ($x \leq 2x$) on obtient : $\boxed{\forall \in D \cap \mathbb{R}_+, \dfrac{x}{\ln(2x)} \leq f(x) \leq \dfrac{x}{\ln(x)}}$.

b. Quand x tend vers 0, $\dfrac{x}{\ln(2x)}$ et $\dfrac{x}{\ln(x)}$ tendent vers 0 donc, d'après le théorème de l'étau, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0}$.

Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{\ln(x)}{x}$ tend vers 0 donc $\dfrac{x}{\ln(x)}$ et $\dfrac{x}{\ln(2x)}$ tendent vers $+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$

Pour $x \in D \cap \mathbb{R}_+$ on a $\dfrac{1}{\ln(2x)} \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\ln(x)}$, donc, comme précedemment, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Le graphique admet donc une branche parabolique de direction l'axe des x au voisinage de $+\infty$.

c. Comme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $\widetilde{f}(0) = 0$.

Grâce à l'encadrement précédent de $\dfrac{f(x)}{x}$ on déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (car f est impaire), donc le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)}{x}$ de $\widetilde{f}$ en 0 tend vers 0 quand x tend vers 0 donc $\widetilde{f}$ est continue en 0 et On a donc $\boxed{\widetilde{f}'(0) = 0}$.

5. a. On a $h'(t) = \dfrac{1}{t} - 2 = \dfrac{1 - 2t}{t}$, d'où le tableau de variation de h sur $]0, 1]$:

h étant continue et strictement croissante sur $]0, 1/2]$ elle induit une bijection de $]0, 1/2]$ sur $]-\infty, h(1/2)]$ (théorème de la bijection). Comme $h(1/2) > 0$, h s'annule exactement une fois en $\alpha \in]0, 1/2]$.

D'après le tableau de variation de h on a $\forall t \in [\alpha, 1], h(t) \geq 0$, soit $\boxed{\forall t \in [\alpha, 1], \ln(t) \geq 2t - 2}$.

b. Pour $x \in [\alpha, 1/2[$, on a $[x, 2x] \subset [\alpha, 1[$ et $\forall t \in [\alpha, 1[, \ln(t) \geq 2t - 2$, donc (les deux membres étant < 0) $\dfrac{1}{\ln(t)} \leq \dfrac{1}{2t - 2}$. $\leq$, soit $f(x) \leq \frac{1}{2} \ln \left| \dfrac{2x - 1}{x - 1} \right|$.

Comme $\frac{1}{2} \ln \left| \dfrac{2x - 1}{x - 1} \right| \underset{x \to 1/2^-}{\longrightarrow} -\infty$, on a $\boxed{\lim\limits_{x \to 1/2} f(x) = -\infty}$ (théorème de comparaison).

6. Si $x > 1$ et $x \leq t \leq 2x$ on a $0 < \ln(t) \leq t - 1$ donc $\dfrac{1}{\ln(t)} \geq \dfrac{1}{t - 1}$. En intégrant entre x et $2x$ il vient : $f(x) \geq \int_x^{2x} \dfrac{dt}{t - 1} = \ln \left| \dfrac{2x - 1}{x - 1} \right|$.

Comme $\ln \left| \dfrac{2x - 1}{x - 1} \right| \underset{x \to 1}{\longrightarrow} +\infty$ on a $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty}$.