$\boxed{\textbf{FI1}}$ **1.** Montrer que l'équation $t + \arctan(t) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on calculera.

On définit la fonction f par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t + \arctan(t)}.$$

2. Justifier soigneusement que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

3. Préciser le signe de f sur $\mathbb{R}^*$.

4. Démontrer que la fonction f est paire.

5. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

6. Montrer que pour tout réel x positif on a : $\arctan(2x) \leq 2\arctan(x)$.

Déduire des questions précédentes les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans la question suivante on veut étudier la limite de f en $+\infty$.

7. Déterminer une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall x > 0, \left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \leq C \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}.$$

En déduire que f a une limite finie quand x tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

Dans la question suivante on veut étudier la limite de f en 0^+.

8. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, au voisinage de 0^+ :

$$\frac{1}{t + \arctan(t)} = \frac{a}{t} + bt + o(t).$$

9. Déduire des questions précédentes que f admet en 0 un développement limité à l'ordre 2 à préciser.

10. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

Préciser $f(0)$ et $f'(0)$.

11. Préciser l'allure du graphique de f au voisinage de 0.

<u>*Correction*</u> : **1.** Soit φ l'application définie par $\varphi(t) = t + \arctan(t)$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 1 + \frac{1}{1+t^2} > 0$, donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{t \to -\infty} \varphi(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$, φ est un bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'après le théorème de la bijection. Comme 0 est solution de l'équation $\varphi(t) = 0$ c'est la seule.

2. D'après la question précédente la fonction $t \longmapsto \frac{1}{\varphi(t)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ (quotient de fonctions continues). Si $x \neq 0$ alors cette fonction est continue sur l'intervalle $[x, 2x]$, donc $f(x)$ existe.

Conclusion : f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

3. Si $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$ on a $\frac{1}{\varphi(t)} > 0$ et en intégrant entre x et $2x$ ($x < 2x$) on aura $f(x) > 0$.

Si $x < 0$ et $t \in [2x, x]$ on a $\frac{1}{\varphi(t)} < 0$ (question 1/) et en intégrant entre $2x$ et x ($2x < x$) on aura $\displaystyle\int_{2x}^{x} \frac{dt}{\varphi(t)} < 0$ donc $f(x) > 0$. En conclusion on a : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) > 0}$.

4. Dans l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\varphi(t)}$ on pose $u = -t$, donc $du = -dt$. On obtient $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{-du}{\varphi(-u)} = \int_{-x}^{-2x} \frac{du}{\varphi(u)}$ (car φ est impaire), donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = f(-x)$ et f est paire.

5. La fonction $t \longmapsto \frac{1}{\varphi(t)}$ étant continue sur $\mathbb{R}^*$ elle admet une primitive Φ sur $\mathbb{R}^*$ et on a, pour tout réel x non nul, $f(x) = [\Phi(t)]_x^{2x} = \Phi(2x) - \Phi(x)$. Comme Φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ il en est de même pour F (comme somme et composée de fonctions dérivables).

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2\Phi'(2x) - \Phi'(x) = \frac{2}{\varphi(2x)} - \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{2}{2x+\arctan(2x)} - \frac{1}{x+\arctan(x)}$, soit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{2\arctan(x) - \arctan(2x)}{(2x+\arctan 2x)(x+\arctan x)}}$$

6. Pour $x \geq 0$ posons $g(x) = 2\arctan(x) - \arctan(2x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (somme et composée de fonctions dérivables) et : $\forall x > 0, g'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+4x^2} = \frac{6x^2}{(1+x^2)(1+4x^2)} > 0$. g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g(0) = 0$ donc $g(x) > 0$ pour $x > 0$ soit :

$$\boxed{\forall x > 0, \arctan(2x) < 2\arctan(x)}.$$

Pour $x > 0$; $f'(x)$ est du signe de $2\arctan(x) - \arctan(2x)$ (car $t + \arctan(t) > 0$ si $t > 0$), donc on a : $\forall x > 0, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. Pour $x > 0$ on a $f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t+\arctan(t)} - \frac{1}{t}\right) dt = \int_x^{2x} \left(\frac{-\arctan(t)}{t(t+\arctan(t))}\right) dt$.

On a donc $\left|f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t}\right| \leq \int_x^{2x} \left|\frac{\arctan(t)}{t(t+\arctan(t))}\right| dt$. D'autre part, pour $t > 0$, on a $0 \leq \arctan(t) \leq \frac{\pi}{2}$ et donc $t(t+\arctan(t)) \geq t^2$, d'où $\left|\frac{\arctan(t)}{t(t+\arctan(t))}\right| \leq \frac{\pi}{2} . \frac{1}{t^2}$.

En intégrant entre 0 et $2x$ on obtient :

$$\forall x > 0, \left|f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t}\right| \leq \frac{\pi}{2} \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}.$$

D'autre part on a : $\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$, et $\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = [\ln t]_x^{2x} = \ln 2$ d'où, pour $x > 0$, $0 \leq |f(x) - \ln 2| \leq \frac{\pi}{4x}$.

D'après le théorème de l'étau on a $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x) - \ln 2| = 0$ soit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2}$.

8. On a, au voisinage de 0, $\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, donc $t + \arctan(t) = 2t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, d'où $\frac{1}{t+\arctan(t)} = \frac{1}{2t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)}$, soit $\frac{1}{t+\arctan(t)} = \frac{1}{2t} . \frac{1}{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)}$. D'autre part on a $\frac{1}{1-\frac{t^2}{6}+o(t^2)} = 1 + \frac{t^2}{6} + o(t^2)$, donc on obtient : $\boxed{\frac{1}{t+\arctan(t)} = \frac{1}{2t} + \frac{t}{12} + o(t)}$.

9. En intégrant le dl généralisé du 8/ entre x et $2x$ on obtient : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{2t} + \int_x^{2x} \frac{t}{12} dt + o(x^2)$, soit $f(x) = \frac{\ln(2)}{2} + \left[\frac{t^2}{24}\right]_x^{2x} + o(x^2)$, ou $\boxed{f(x) = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$.

10. D'après la question précédente on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{\ln(2)}{2}$, donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{\ln 2}{2}$.

D'autre part f a un dl en 0 à l'ordre 1 et 0 ($f(x) = \frac{\ln(2)}{2} + o(x)$), donc le prolongement de f est dérivable en 0 $\boxed{f'(0) = 0}$.