EV3 Dans ce problème E désigne l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

Pour tout élément f de E on note g l'application de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par :

$$g(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

Soit T l'application qui à la fonction $f \in E$ associe la fonction g (donc $g = T(f)$).

Il est clair que T est linéaire (on ne demande pas de le vérifier).

1. Justifier l'existence de g .

2. Soit $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$. Parmi les notations $(T(f))(x)$, $T(f(x))$ et $T(f)(x)$, lesquelles ont un sens ?

3. Montrer que pour tout $f \in E$, la fonction $T(f)$ appartient à E .

T définit donc un endomorphisme de E dans E que l'on notera encore T .

4. Montrer que si $f \in E$, la fonction $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée et montrer que $T(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

5. T est-elle surjective ?

6. On suppose $f \in E$ bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $T(f)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

7. Soit $f \in E$ de période T . Montrer que f a une primitive de période T ssi $\int_0^T f(t) dt = 0$.

Déterminer le noyau de T et préciser un élément non nul de $\ker T$ de classe C^∞ . T est-elle injective ?

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

8. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par T (i.e. : $P \in \mathbb{R}_n[X] \implies T(P) \in \mathbb{R}_n[X]$).

On note Ψ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe $T(P)$.

9. Préciser le noyau de Ψ . Conclusion pour Ψ ?

10. Écrire la matrice de Ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Corrigé :

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle $[x, x+1]$ pour tout réel x , donc $g(x)$ est défini pour tout réel x .

2. $(T(f))(x)$ a un sens : c'est l'image de x par la fonction $T(f)$.

$T(f(x))$ n'a pas de sens car $f(x)$ est un réel et non une fonction.

On peut considérer que $T(f)(x)$ est une écriture allégée de $(T(f))(x)$.

3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle y admet une primitive F . On a alors $T(f)(x) = F(x+1) - F(x)$ pour tout réel x . La fonction F étant continue (car dérivable) la fonction $T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions continues.

Conclusion : si $f \in E$ alors $T(f)$ appartient à E .

4. Pour tout réel x on a la relation $T(f)(x) = F(x+1) - F(x)$ où F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Donc $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme et composée de fonctions dérivables) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (T(f))'(x) = f(x+1) - f(x).$$

La fonction $x \mapsto f(x+1) - f(x-1)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, $T(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

5. D'après 5/ la fonction $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour $f \in E$. Par conséquent une fonction continue non dérivable sur $\mathbb{R}$ (par exemple $x \mapsto |x|$) n'a pas d'antécédent par T .

Conclusion : T n'est pas surjective.

6. Supposons f bornée sur $\mathbb{R}$, i.e. : $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$.

Pour tout réel x on a alors : $|T(f)(x)| = \left| \int_x^{x+1} f(t) dt \right| \leq \int_x^{x+1} |f(t)| dt \leq \int_x^{x+1} M dt = 2M$.

Conclusion : $T(f)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

7. $\implies$ (CN) : supposons que $f \in E$ de période T ait une primitive F de période T . On a :

$$\int_0^T f(t) dt = F(T) - F(0) = 0.$$

$\Leftarrow$ (CS) : Soit $f \in E$ de période T telle que $\int_0^T f(t) dt = 0$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x on a : $F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$ (car f est de période T : v. feuille 20, V/ 3/), donc $F(x+T) - F(x) = 0$ et F est de période T .

On a $f \in \ker T \iff \forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+1} f(t) dt = 0$.

En dérivant les deux membres il vient : $f(x+1) = f(x)$ donc f est de période 1.

Réciproquement, si f est de période 1 on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+1} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$ et donc : $f \in \ker T \iff \int_0^1 f(t) dt = 0$.

Conclusion : $\ker T$ est constitué des fonctions continues de période 1 telles que $\int_0^1 f(t) dt = 0$ (c'est à dire des fonctions continues de période 1 ayant une primitive de période 1).

Par exemple la fonction $x \mapsto \sin(2\pi x)$ appartient au noyau de T .

T n'est donc pas injective.

8. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, P admet une primitive $Q \in \mathbb{R}[X]$, dont $T(P)(X) = Q(X+1) - Q(X) \in \mathbb{R}[X]$.

9. D'après 7/ les éléments de $\ker \Psi$ sont les P polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de période 1 tels que $\int_0^1 P(t) dt = 0$.

Or un polynôme P de période 1 est constant :

Première démonstration : pour tout réel x on a $P(x+1) - P(x) = 0$. Par une récurrence évidente on a $P(k) = P(0)$ pour tout entier naturel k . Le polynôme $P(X) - P(0)$ est nul car il a une infinité de racines donc $d^\circ P \leq 0$ i.e. P est constant.

Deuxième démonstration : si P est périodique donc borné sur $\mathbb{R}$. Or les seuls polynômes bornés sur $\mathbb{R}$ sont les polynômes constants.

Si $P \in \ker \Psi$ on a donc $P = \text{constante}$; comme de plus $\int_0^1 P(t) dt = 0$ alors $P = 0$.

Conclusion : $\ker \Psi = \{0\}$ donc Ψ est injective.

Comme Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dimension finie, c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

10. Pour tout entier naturel k on a $\Psi(X^k) = \int_x^{x+1} t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_x^{x+1} = \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1}$. On a

$(x + 1)^{k+1} - x^{k+1} = \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} x^i$, d'où la matrice de Ψ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\binom{2}{0}}{2} & \frac{\binom{3}{0}}{3} & \cdots & \frac{\binom{n+1}{0}}{n+1} \\ 0 & \frac{\binom{2}{1}}{2} & \frac{\binom{3}{1}}{3} & \cdots & \frac{\binom{n+1}{1}}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{\binom{2}{2}}{3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \frac{\binom{n+1}{n}}{n+1} \end{pmatrix}$$