$\boxed{\textbf{EV2}}$ Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E (i.e $E = F \oplus G$).

Pour $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ on appelle *affinité de base F, de direction G et de rapport k* l'application f de E définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in F \times G,\ f(x_1 + x_2) = x_1 + kx_2.$$

Partie 1 : généralités

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Montrer qu'une symétrie s par rapport à F et parallèlement à G est une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques (base, direction et rapport).

3. Montrer que $F = \ker(f - Id_E)$ et $G = \ker(f - kId_E)$.

4. Montrer que f est bijective et que f^{-1} est une affinité dont on donnera les éléments carctéristiques.

5. Préciser une base de E dans laquelle la matrice de f est "simple". Préciser cette matrice.

Calculer le déterminant de f et retrouver que f est bijective.

Partie 2 : un premier exemple

On se place dans cette partie dans $E = \mathbb{R}^3$ et on considère l'application g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (x, y, x) \in \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = (x, 3x - 2y, -3x + 3y + z)$.

On admettra que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

6. Déterminer $F = \ker(g - Id_E)$ et en déterminer une base et sa dimension.

7. Soit $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Calculer $\det(g - kId_E)$.

En déduire que $\ker(g - kId_E)$ est différent de $\{(0, 0, 0)\}$ pour une unique valeur de k.

8. Pour la valeur de k trouvée précedemment montrer que $G = \ker(g - kId_E)$ est une droite vectorielle dont on déterminera une base.

Montrer que $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$.

9. D'après 8/ on peut poser $E' = F \oplus G$. Quelle est la dimension de E'?

En déduire simplement que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ et que g est une affinité dont on donnera les éléments caractéristiques.

Partie 3 : un deuxième exemple

On se place désormais dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On considère l'application h qui à un élément $P \in E$ associe $Q = h(P)$ défini par :

$$Q = 2(X - 1)^2 [P(0) \times (2X + 1) + P'(0) \times X] - P(X).$$

10. Montrer que h est un endomorphisme de E.

Pour $a \in \mathbb{R}$ on pose $F_a = \{P \in E \ / \ P(a) = P'(a) = 0\}$.

11. Caractériser les éléments P de F_a en termes de racines de P et de leur multiplicité.

Montrer que F_a est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer une base et sa dimension.

12. Montrer que $\ker(h + Id_E) = F_0$.

13. Montrer que $\ker(h - Id_E) = F_1$.

En déduire que h est une affinité dont on donnera les éléments caractéristiques.

Corrigé :

Partie 1 **1.** laissé en exercice.

2. La symétrie par rapport à F et parallèlement à G est définie par : $\forall (x_1, x_2) \in F \times G,\ s(x_1 + x_2) = x_1 - x_2$. Donc s est l'affinité de base F, de direction G et de rapport -1.

3. On a $x \in \ker(f - Id_E) \iff f(x) = x \iff x_1 + kx_2 = x_1 + x_2$ (si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in F \times G$) $\iff (k-1)x_2 = 0 \iff x_2 = 0$ (car $k \neq 1$) $\iff x = x_1$. Donc $\boxed{F = \ker(f - Id_E)}$.

De même : $x \in \ker(f - kId_E) \iff f(x) = kx \iff x_1 + kx_2 = kx_1 + kx_2 \iff (k-1)x_1 = 0$, ce qui équivaut à $x_1 = 0$ donc $\boxed{G = \ker(f - kId_E)}$.

4. Soit $y = y_1 + y_2 \in E$ donné. On considère l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$. Si $y = y_1 + y_2$ et $x = x_1 + x_2$ sont les décompositions de x et y dans $F \oplus G$ l'équation équivaut à $y_1 + y_2 = x_1 + kx_2$ ou encore à $y_1 = x_1$ et $y_2 = kx_2$ par unicité de la décomposition dans $F \oplus G$, soit $x_1 = y_1$ et $x_2 = \frac{1}{k}y_2$ (car $k \neq 0$).

L'équation a une unique solution $x = y_1 + \frac{1}{k}y_2$. Donc f est bijective et $f^{-1}(y_1 + y_2) = y_1 + \frac{1}{k}y_2$.

f^{-1} est donc l'affinité de base F, de direction G et de rapport $\frac{1}{k}$.

5. Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_q)$ une base de G. Alors $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de E (car $E = F \oplus G$) et dans cette base la matrice M de f est la matrice diagonale ayant sur la diagonale p fois "1" puis q fois k (car $f(f_i) = f_i$ et $f(g_i) = kg_i$).

On en déduit que $\det M = \det f = k^q$. Comme $\det f \neq 0$, f est bijective.

Partie 2 **6.** On a $(x, y, z) \in \ker(g - Id_E) \iff g(x, y, z) = (x, y, z) \iff \begin{cases} x &= x \\ 3x - 2y &= y \\ -3x + 3y + z &= z \end{cases} \iff x - y = 0$.

Les éléments de $\ker(g - Id_E)$ s'écrivent $(\alpha, \alpha, \beta) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 0, 1)$. Le système $(u = (1, 1, 0), v = (0, 0, 1))$ est un système générateur de $\ker(g - Id_E)$. De plus il est libre ($\alpha u + \beta v = (0, 0, 0) \iff (\alpha, \alpha, \beta) = (0, 0, 0) \iff \alpha = \beta = 0$) c'est donc une base de F et $\boxed{\dim F = 2}$.

7. La matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ donc celle de $g - kId_E$ est $A - kI_3 = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ 3 & -2-k & 0 \\ -3 & 3 & 1-k \end{pmatrix}$. Donc $\det(g - kId_E) = \det(A - kI_3) = (1-k)^2(-2-k)$ (= produit des éléments diagonaux).

On a : $\ker(g - kId_E) \neq \{(0, 0, 0)\} \iff g - kId_E$ non injective $\iff g - kId_E$ non bijective (car $g - kId_E$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$) $\iff \det(g - kId_E) = 0 \iff \boxed{k = -2}$ (car $k \neq 1$).

8. On a $(x, y, z) \in \ker(g + 2Id_E) \iff g(x, y, z) = -2(x, y, z) \iff$

$$\begin{cases} x &= -2x \\ 3x - 2y &= -2y \\ -3x + 3y + z &= -2z \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases}.$$

Les éléments de $G = \ker(g + 2Id_E)$ s'écrivent : $(0, \alpha, -\alpha)$: c'est la droite vectorielle de base $(0, 1, -1)$.

On a $X \in F \cap G \iff f(X) = X$ et $f(X) = -2X$ donc $X = -2X$ soit $X = (0, 0, 0)$ i.e $\boxed{F \cap G = \{(0, 0, 0)\}}$.

9. On a $\dim E' = \dim F \oplus G = \dim F + \dim G = 2 + 1 = 3$. Or E' est un sous-espace vecoriel de $\mathbb{R}^3$ de même dimension 3 donc $\boxed{E' = \dim F \oplus G = \mathbb{R}^3}$.

Pour $x = x_1 + x_2$ ($(x_1, x_2) \in F \times G$) on a $g(x) = g(x_1) + g(x_2)$ (car g linéaire), soit $g(x) = x_1 - 2x_2$. g est donc l'affinité de base F, de direction G et de rapport -2.

$\boxed{\textbf{Partie 3}}$ **10.** On vérifie facilement que h est linéaire et de plus $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ si $P \in \mathbb{R}_3[X]$ donc h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

11. On a $P \in F_a \iff P \in E$ et $P(a) = P'(a) = 0 \iff P \in E$ et a est racine multiple de P, ce qui équivaut à $P = (X-a)^2 P_1$ avec $d°P_1 \leq 1$, soit $P = (X-a)^2(\alpha + \beta X)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Les éléments de F_a s'écrivent donc : $\alpha (X-a)^2 + \beta X (X-a)^2$. Le système $\left((X-a)^2, X(X-a)^2\right)$ est donc un système générateur de F_a. Comme les polynômes $(X-a)^2$ et $X(X-a)^2$ sont non nuls de degrés distincts ce système est libre et c'est donc une base de F_a et $\boxed{\dim F_a = 2}$.

12. Pour $P \in E$ on a $P \in \ker(h + Id_E) \iff h(P) = -P \iff 2(X-1)^2 [P(0)(2X+1) + P'(0)X] =$ 0. Comme le polynôme $2(X-1)^2$ est non nul c'est équivalent à : $P(0)(2X+1) + P'(0)X = 0$, soit $(2P(0) + P'(0))X + P(0) = 0$. On obtient le système : $2P(0) + P'(0) = P(0) = 0$, soit $P(0) = P'(0) = 0$, donc $\boxed{\ker(h + Id_E) = F_0}$.

13. De même : pour $P \in E$ on a $P \in \ker(h - Id_E) \iff h(P) = P \iff 2(X-1)^2 [P(0)(2X+1) + P$ $2P(X)$. Le polynôme P est donc factorisable par $(X-1)^2$, donc 1 est racine multiple de P donc $P(1) = P'(1) = 0$, donc $P \in F_1$. On a donc $\ker(h - Id_E) \subset F_1$. D'autre part si $P \in F_1$, P s'écrit $P = (X-1)^2(\alpha + \beta X)$ et on vérifie que $h(P) = P$ donc finalement $\boxed{\ker(h - Id_E) = F_1}$.

Comme en 9/ on vérifie que $\mathbb{R}_3[X] = F_0 \oplus F_1$. Pour $P = P_0 + P_1$ avec $P_0 \in F_0$ et $P_1 \in F_1$ on a : $h(P) = h(P_0 + P_1) = h(P_0) + h(P_1) = -P_0 + P_1$.

h est donc la symétrie par rapport à F_1 et parallèlement à F_0. C'est donc l'affinité de base F_1, de direction F_0 et de rapport -1.