On se propose de déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right). \tag{1}$$

On procède par analyse-synthèse. Soit donc $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (1).

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $4x^2y" + y = 0$.

3. On effectue le changement d'inconnue défini par $x = e^t$ et on pose pour tout t réel : $g(t) = f(e^t)$.

Montrer que g vérifie l'équation différentielle : $\forall t \in \mathbb{R}, 4g"(t) - 4g'(t) + g(t) = 0$.

4. En déduire f.

5. Conclure.

Corrigé :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc l'application $x \longmapsto f\left(\frac{1}{4x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (comme composée de fonctions dérivables). Comme $f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right)$ pour x réel non nul, on en déduit que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

2. En dérivant les deux membres de (1) sur $\mathbb{R}^*$ on obtient (f étant deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$) : $f"(x) = -\frac{1}{4x^2}f'\left(\frac{1}{4x}\right)$. D'autre part, en remplaçant x par x par $\frac{1}{4x}$ dans (1) il vient $f'\left(\frac{1}{4x}\right) = f(x)$, donc pour tout réel non nul : $f"(x) = -\frac{1}{4x^2}f(x)$, donc f est solution de l'équation différentielle $4x^2y" + y = 0$.

3. Comme $g(t) = f(e^t)$ pour tout réel t, g est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = g(t) = g(\ln x)$, donc $f'(x) = \frac{g'(\ln x)}{x}$ et $f"(x) = \frac{\frac{g"(\ln x)}{x}x - g'(\ln x)x}{x^2} = \frac{g"(\ln x) - g'(\ln x)x}{x^2}$.

Comme $4x^2f"(x) + f(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient $4(g"(\ln x) - g'(\ln x)x) + g(\ln x) = 0$, soit : $4g"(\ln x) - 4g'(\ln x)x + g(\ln x) = 0$. Donc : $\forall t \in \mathbb{R}, \boxed{4g"(t) - 4g'(t)x + g(t) = 0}$.

4. g est solution de l'équation différentielle $4y" - 4y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $4r^2 - 4r + 1 = 0$, donc $r = \frac{1}{2}$ est racine double. Les solutions de cette équation sont donc $y(t) = e^{\frac{t}{2}}(At + B)$ (A et B constantes réelles).

Comme $f(x) = g(\ln x)$ pour $x > 0$, on obtient : $\forall x > 0, f(x) = \sqrt{x}(A\ln x + B)$.

5. Il reste à faire la synthèse : posons $f(x) = \sqrt{x}(A\ln x + B)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

f vérifie (1) ssi : $\forall x > 0, \frac{1}{2\sqrt{x}}(A\ln x + B) + A\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(A\ln\frac{1}{4x} + B\right)$, soit $\forall x > 0, A(2\ln x + 2 + \ln 4) = 0$, ce qui équivaut à $A = 0$.

Conclusion : les applications f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ dérivables vérifiant (1) sont : $x \longmapsto B\sqrt{x}$, avec B réel quelconque.