$\boxed{\textbf{EF2}}$ Le problème est d'étudier l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(\varphi(x)) \tag{1}$$

où φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donnée et l'inconnue une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

On désigne par $\mathcal{E}(\varphi)$ l'ensemble des fonctions continues f vérifiant (1).

Dans la partie I on étudie le cas où φ est la fonction affine définie par $\varphi(x) = ax + b$.

Partie I : fonctions continues vérifiant $f(x) = f(ax+b)$

Pour a et b réels avec $a \neq 0$ on pose dans cette partie $\varphi(x) = ax + b$.

On se propose donc de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}(\varphi)$ des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(ax+b)$.

1. Dans cette question on considère le cas où $a = 1$.

a. Dans le cas où $b \neq 0$, donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ appartienne à $\mathcal{E}(\varphi)$.

b. Soit ω un réel non nul.

A quelle condition portant sur ω, la fonction : $c : x \longmapsto \cos(\omega x)$ appartient-elle à l'ensemble $\mathcal{E}(\varphi)$?

2. Dans cette question on considère le cas où $a = -1$.

a. Montrer que $f \in \mathcal{E}(\varphi) \iff \forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{b}{2} + x\right) = f\left(\frac{b}{2} - x\right)$.

b. Interpréter graphiquement la condition précédente.

Dans les questions 3/, 4/, 5/ et 6/ suivantes on suppose que $|a| < 1$.

3. Montrer que φ a un unique point fixe L (i.e. L est l'unique réel tel que $\varphi(L) = L$).

Pour x réel donné on considère la suite récurrente (x_n) définie par :

$$x_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = ax_n + b.$$

4. Montrer que la suite $(x_n - L)$ est une suite géométrique de raison a.

En déduire l'expression de x_n en fonction de a, n, x et L. Quelle est la limite de la suite (x_n) ?

5. Montrer que si f appartient à $\mathcal{E}(\varphi)$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_{n+1}) = f(x_n)$, puis que $f(x) = f(L)$.

6. En déduire $\mathcal{E}(\varphi)$ dans le cas où $|a| < 1$.

Dans la question suivante on suppose que $|a| > 1$.

7. Montrer que si f appartient à $\mathcal{E}(\varphi)$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right).$$

En déduire $\mathcal{E}(\varphi)$ dans le cas où $|a| > 1$.

Partie II : une généralisation

Dans cette partie on suppose que la fonction φ vérifie la condition :

$$\exists k \in [0, 1[\ / \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k|x - y|. \tag{2}$$

8. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

9. Montrer que pour tout réel x on a l'encadrement :

$$\varphi(0) - k|x| \leq \varphi(x) \leq \varphi(0) + k|x|.$$

En déduire les limites de la fonction $x \longmapsto \varphi(x) - x$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

10. Montrer que φ a au moins un point fixe L.

Montrer que ce point fixe est unique.

On considère la suite récurrente (x_n) définie par $x_0 = x \in \mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

11. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$|x_{n+1} - L| \leq k|x_n - L|.$$

En déduire que la suite (x_n) est convergente et préciser sa limite.

12. Soit $f \in \mathcal{E}(\varphi)$. Montrer que pour tout entier naturel n on a $f(x_n) = f(L)$.

En déduire $\mathcal{E}(\varphi)$.[ex7.2014]

Correction :

Partie I

1. a. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{E}(\varphi)$ ssi $f(x+b) = x$ pour tout réel x, ssi f est une fonction périodique de période b.

b. La fonction c appartient à $\mathcal{E}(\varphi)$ ssi $\cos[\omega(x+b)] = \cos(\omega x)$ pour tout réel x, soit $\cos[\omega x + \omega b] = \cos(\omega x)$. C'est équivalent à dire que ω est une période de cos, soit : $\exists k \in \mathbb{Z}^*/\omega b = 2k\pi$, ou $\boxed{\omega = \frac{2k\pi}{b}}$.

2. a. On a $f \in \mathcal{E}(\varphi) \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(-x+b) = f(x)$. En posant $x = \frac{b}{2} - y$ c'est équivalent à dire que pour tout réel y on a : $f\left[-\left(\frac{b}{2} - y\right) + b\right] = f\left(\frac{b}{2} - y\right)$, soit : $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{b}{2} + y\right) = f\left(\frac{b}{2} - y\right)}$.

b. La relation précédente est équivalente à dire que la graphique de la fonction f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = b/2$.

3. On a x point fixe de $\varphi \iff \varphi(x) = x \iff ax + b = x \iff (1-a)x = b$. Comme $a \neq 1$ c'est équivalent à dire que $x = \frac{b}{1-a}$. La fonction φ a donc un unique point fixe $\boxed{L = \frac{b}{1-a}}$.

4. Pour tout entier naturel n on a $x_{n+1} - L = ax_n + b - (aL + b)$ (car $L = aL + b$), soit $x_{n+1} - L = ax_n - aL = a(x_n - L)$, donc la suite $(x_n - L)$ est une suite géométrique de raison a.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n - L = a^n(x_0 - L)$, soit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n = a^n(x - L) + L}$.

Comme $a^n \longrightarrow 0$ (car $|a| < 1$) on a $\boxed{\lim(x_n) = L}$.

5. Si f appartient à $\mathcal{E}(\varphi)$ on a pour tout entier naturel n : $f(ax_n + b) = f(x_n)$, soit $f(x_{n+1}) = f(x_n)$.

La suite $(f(x_n))$ est donc constante, soit : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = f(x_0) = f(x)$.

Quand n tend vers l'infini on a $(x_n) \longrightarrow x$ donc $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ (car f est continue en x). En faisant tendre n vers l'infini dans la relation $f(x_n) = f(x)$ on a donc $\boxed{L = f(x)}$.

6. D'après la question précédente, si f appartient à $\mathcal{E}(\varphi)$ alors f est constante.

Réciproquement (synthèse) si f est constante alors il est clair que f vérifie (1).

Conclusion : on a donc $\mathcal{E}(\varphi) =$ ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

7. Si f appartient à $\mathcal{E}(\varphi)$ on a $f(ax+b) = f(x)$ pour tout réel x, donc, en remplaçant x par $\frac{x}{a} - \frac{b}{a}$ on obtient : $f\left[a\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) + b\right] = f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right)$, soit $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right)}$.

La relation précédente montre que f appartient à $\mathcal{E}(\varphi)$, φ étant la fonction affine définie par $\varphi(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$. Comme $\left|\frac{1}{a}\right| < 1$ (car $|a| > 1$) on a $f =$ constante d'après la question 6/.

Comme en 6/ on en déduit que $\mathcal{E}(\varphi) =$ ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

Partie II

8. Soit a un réel donné. D'après (2) on a $\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x) - \varphi(a)| \leq k\,|x - a|$.

Quand x tend vers a on a $|x - a| \longrightarrow 0$ donc, d'après le théorème de l'étau, $\lim\limits_{x \to a} |\varphi(x) - \varphi(a)| = 0$, soit $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a)$. Par définition la fonction φ est continue en a.

Donc φ est continue sur $\mathbb{R}$.

9. D'après (2) (avec $y = 0$) on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x) - \varphi(0)| \leq k\,|x|$, soit $-k\,|x| \leq \varphi(x) - \varphi(0) \leq k\,|x|$, ou : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(0) - k\,|x| \leq \varphi(x) \leq \varphi(0) + k\,|x|.}$

Pour x positif on a donc : $\varphi(x) - x \leq \varphi(0) + k\,|x| - x$, soit $\varphi(x) - x \leq \varphi(0) - (1 - k)\,x$ (car $|x| = x$, x étant ≥ 0). Comme $1 - k > 0$ on a $\varphi(0) - (1 - k)\,x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ on a $\boxed{\varphi(x) - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty}$ (théorème de comparaison).

De même, si x est négatif on a $\varphi(x) - x \geq \varphi(0) - k\,|x| - x$ soit $\varphi(x) - x \geq \varphi(0) - (1 - k)\,x$ (car $|x| = -x$, x étant ≤ 0). Comme $1 - k > 0$ on a $\varphi(0) - (1 - k)\,x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$ on a $\boxed{\varphi(x) - x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

10. Comme $\varphi(x) - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ on a : $\exists b \in \mathbb{R}_+ / \varphi(b) - b < 0$ et comme $\varphi(x) - x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\exists a \in \mathbb{R}_- / \varphi(a) - a > 0$. Soit la fonction Ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\Psi(x) = \varphi(x) - x$.

Ψ est continue sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions continues et $\Psi(a) > 0$ et $\Psi(b) < 0$, donc, d'après le théorème de la valeur intermédiaire : $\exists L \in [a, b] / \Psi(L) = 0$, donc $\exists L \in \mathbb{R}$, $\varphi(L) = L$.

Si L' est un autre point fixe on a, d'après (2) : $|\varphi(L) - \varphi(L')| \leq k\,|L - L'|$. Comme $\varphi(L) = L$ et $\varphi(L') = L'$ on obtient : $|L - L'| \leq k\,|L - L'|$, soit $(1 - k)\,|L - L'| \leq 0$. Comme $1 - k > 0$ on a donc $|L - L'| \leq 0$ donc $|L - L'| = 0$, d'où $L = L'$.

Conclusion : φ a un unique point fixe L.

11. D'après (2) on a, pour tout entier naturel n : $|\varphi(x_n) - \varphi(L)| \leq k\,|x_n - L|$ (avec $x = x_n$ et $y = L$), soit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - L| \leq k\,|x_n - L|}$.

Par une récurrence aisée il vient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - L| \leq k^n\,|x_0 - L|}$.

On a donc $0 \leq |x_n - L| \leq k^n\,|x_0 - L|$ pour tout entier naturel n et $k^n \longrightarrow 0$ (car $k \in [0, 1[$), donc, d'après le théorème de l'étau, on a $|x_n - L| \longrightarrow 0$ soit $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = L}$.

12. Pour $f \in \mathcal{E}(\varphi)$ et tout entier naturel n on a $f(\varphi(x_n)) = f(x_n)$, soit $f(x_{n+1}) = f(x_n)$. La suite $(f(x_n))$ est donc constante donc $f(x_n) = f(x_0) = f(x)$ pour tout entier naturel n. En faisant tendre n vers l'infini on obtient $f(L) = f(x)$. Donc f est constante et comme en 6/ on en déduit que $\mathcal{E}(\varphi) =$ ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.