D1 Soient a, b et λ trois réels avec $a \neq b$. On considère D_n et $P_n(x)$ les déterminants (n, n) ($n \in \mathbb{N}^*$) définis par

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda & a & \dots & a \\ b & \lambda & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \lambda \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad P(x) = \begin{vmatrix} \lambda + x & a + x & \dots & a + x \\ b + x & \lambda + x & \dots & a + x \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \dots & b + x & \lambda + x \end{vmatrix}$$

x étant un réel.

1. Montrer qu'il existe des constantes $a_{i,j}$ (qu'on ne demande pas de calculer) telles que

$$P(x) = \begin{vmatrix} \lambda + x & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ b + x & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b + x & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

En déduire que $P(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

2. Calculer $P(-a)$ et $P(-b)$. En déduire $P(x)$ pour tout réel x puis la valeur de D_n .

Corrigé :

1. En retranchant aux colonnes 2, 3, ..., n la première on obtient que $P(x)$ a la forme indiquée.

$$\text{En développant le déterminant } P(x) = \begin{vmatrix} \lambda + x & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ b + x & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b + x & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad \text{par rapport à la première}$$

colonne on obtient une somme de polynômes de degrés 1 en x , donc $P(x)$ est bien un polynôme de degré au plus 1.

$$2. \text{ On a } P(-a) = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & \dots & 0 \\ b - a & \lambda - a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b - a & \dots & b - a & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a)^n \text{ (déterminant d'une matrice}$$

$$\text{triangulaire inférieure). De même on a } P(-b) = \begin{vmatrix} \lambda - b & a - b & \dots & a - b \\ 0 & \lambda - b & \dots & a - b \\ \vdots & \ddots & \ddots & a - b \\ 0 & \dots & 0 & \lambda - b \end{vmatrix} = (\lambda - b)^n \text{ (déterminant d'une matrice triangulaire supérieure).}$$

D'après 1/ il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \alpha x + \beta$.

On obtient donc le système $P(-a) = (\lambda - a)^n = -\alpha a + \beta$ et $P(-b) = (\lambda - b)^n = -\alpha b + \beta$.
D'où $\alpha = \frac{(\lambda - a)^n - (\lambda - b)^n}{b - a}$ et $\beta = \frac{a(\lambda - b)^n - b(\lambda - a)^n}{a - b}$.

Enfin $D_n = P(0) = \beta$, soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = \frac{a(\lambda - b)^n - b(\lambda - a)^n}{a - b}$.