$\boxed{1}$ *Convergence au sens de Césaro* : on dit qu'une suite (u_n) *tend vers l au sens de Césaro* (ou *converge en moyenne vers l*) ssi : $\lim \dfrac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n} = l$.

1. Montrer que si une suite converge vers l alors elle converge au sens de Césaro vers l. La réciproque est-elle vraie ? (donner un contre-exemple).

2. Montrer que si une suite tend vers $+\infty$ alors elle tend aussi vers $+\infty$ au sens de Césaro.

3. *Applications* :

a/ Trouver la limite de la suite (v_n) telle que : $\frac{n}{v_n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}$, où (x_n) est une suite convergente vers un réel l non nul.

b/ Montrer que si $\lim (u_{n+1} - u_n) = 0$ alors on a : $\lim \frac{u_n}{n} = 0$ (i.e. $u_n = o(n)$).

c/ Soit (u_n) une suite à termes > 0. Montrer que si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ alors $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$.

Utiliser ce dernier résultat pour trouver la limite des suites suivantes

$$\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}; \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(n+n)}}{n}; \frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}.$$

$\boxed{2}$ Soit la suite (x_n) définie pour tout entier n non nul par :

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

1. Calculer x_1, x_2 et x_3.

Dans les questions suivantes on montre que cette suite converge et on calcule la valeur de sa limite.

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1 - (-1)^n x^n}{1 + x}.$$

3. Démontrer que la suite (y_n) définie pour tout entier naturel n par $y_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ tend vers 0.

4. En déduire la valeur de la limite de la suite (x_n).

$\boxed{3}$ *Suites extraites* :

1. Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\varphi(n) \geq n.$$

En déduire que si une suite converge vers un réel l toute suite extraite converge vers l (v. cours).

2. Soit (u_n) une suite telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l. Montrer que (u_n) converge vers l.

3. Montrer que si une suite (u_n) n'est pas bornée alors il existe une suite extraite de (u_n) qui tend vers l'infini.

Suites récurrentes :

$\boxed{4}$ Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \sqrt{5 + 2u_n}$.

1. Représenter graphiquement la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{5 + 2x}$ et les premiers termes de la suite (u_n). Montrer que (u_n) est convergente et trouver sa limite l.

2. Mêmes question en prenant $u_0 = 0$.

3. On veut estimer la vitesse de convergence de la suite (u_n).

Chercher pour celà un réel k tel que : $0 < k < 1$ et vérifant : $|u_{n+1} - l| \leq k\,|u_n - l|$. Conclure.

$\boxed{5}$ **1.** Etudier les suites récurrentes définies par :

a/ $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + 1}$;

b/ u_0 et a réels > 0 et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a^2}{u_n}\right)$;

c/ $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3 + u_n}$;

d/ $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

2. Plus généralement soit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ suivant que f est croissante ou décroissante sur I. Représenter graphiquement (u_n) dans chaque cas.

$\boxed{6}$ Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$. On considère les suites définies par

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Etudier la convergence de (u_n) et (v_n) (on pourra étudier le sens de variation de (u_n) et (v_n) et considérer la suite (t_n) définie par $t_n = u_n - v_n$.

2. Soit la suite (w_n) définie par : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$. Montrer que (w_n) est toujours définie. Calculer w_n en fonction de w_0 et n et en déduire un expression de (u_n) et (v_n) en fonction de a, b et n.

Histoire des mathématiques : *la fonction zêta de Riemann, hypothèse de Riemann.*

Elle est définie comme la limite de la suite $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^z}$, notée $\xi(z) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$. Cette fonction ξ est appelée *fonction zêta de Riemann*, et elle est définie dans $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Euler (mathématicien suisse, 1707-1783) calcule les valeurs de $\xi(2n)$ pour n entier; ainsi $\xi(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Par contre on ne sait pratiquement rien des réels $\xi(2n+1)$; à la surprise générale le français Roger Apéry a démontré en 1979 que le réel $\xi(3)$ est irrationnel. Cette fonction est très importante car elle est liée à la répartition des nombres premiers dans l'ensemble des nombres réels.

Riemmann a conjecturé que les zéros non triviaux de la fonction ξ ont tous une partie réelle égale à $1/2$. Malgré tous les efforts cette conjecture, appelés *hypothèse de Riemann*, n'a toujours pas été démontrée à l'heure actuelle.