

1 On rappelle qu'une suite (u_n) est *géométrique* si : $\exists q \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$.

Le réel q (indépendant de n) s'appelle *raison* de la suite (u_n) .

Le n -ième terme d'une suite géométrique de raison q est : $u_n = u_0 \times q^n$ (ou : $u_1 \times q^{n-1} \dots$)

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

En déduire que la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ s'écrit

$$S = \frac{1^{er} \text{terme} - q \times \text{dernier terme}}{1 - q}$$

2. Applications : a. Calculer, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N} : 1 + x + x^2 + \dots + x^n$.

En déduire que pour x réel : $|x| \leq \frac{1}{2} \implies \left| \frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \dots + x^n) \right| \leq 2|x|^{n+1}$.

3. Calculer, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et $n \in \mathbb{N} : 1 + x^2 + \dots + x^{2n}$.

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} : 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n}$.

2 Suites arithmético-géométriques

Pour $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ on pose $f(x) = qx + a$.

Soit la suite (x_n) définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = qx_n + a$.

1. Calculer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (α est appelé *point fixe* de f).

2. Montrer que la suite $(x_n - \alpha)$ est une suite géométrique de raison q .

En déduire x_n en fonction de α, q, a et n .

Exemple : calculer le n -ième terme de la suite (x_n) définie par :

$$x_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = 3x_n - 1.$$

3 1. Soit A un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers la borne supérieure de A . (Indication : utiliser la propriété de la borne supérieure en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$).

2. Montrer que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels (Indication : utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: voir feuille 1).

4 Etudier les limites des suites :

1. $\frac{3n^2 + 2n - 1}{5n + 3}$; **2.** $\frac{5n^4 + 2n^3 + 1}{n^3 + n^2 + 2}$; **3.** $\frac{2n^2 + (-1)^n}{3n^2 + (-1)^n}$; **4.** $\frac{n^2 + \cos n}{2n^2 + \sin n}$ **5.** $\frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$; **6.**

$\frac{2^n + n^{100}}{2^n - n^{99}}$; **7.** Etudier la limite de la suite $\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$.

5 Différentes façons d'étudier la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Montrer que (u_n) est croissante.

2. Montrer que pour tout entier naturel n , $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

3. *Comparaison avec une intégrale* : montrer que pour tout entier naturel $k > 0$ on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}. \text{ Interpréter graphiquement cet encadrement.}$$

En déduire un encadrement de (u_n) et conclure. Donner un équivalent simple de (u_n) .

6 Différentes façons d'étudier la suite $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$ on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. En déduire une majoration de (v_n) . En déduire que (v_n) est convergente et donner un encadrement de la limite.

2. Etudier la convergence de (v_n) en comparant avec une intégrale (s'inspirer de l'exercice précédent).

7 Suites géométriques :

Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel $a \geq 0$:

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

En déduire l'étude de la convergence d'une suite géométrique de raison q suivant les valeurs de q .

8 Comparaison avec une suite géométrique :

1. Soit (v_n) une suite convergente vers un réel $l > 1$. Montrer qu'il existe un réel $l' > 1$ et un entier naturel N tel que pour tout entier $n \geq N$ on ait $v_n \geq l'$.

Enoncer et démontrer une propriété analogue pour $0 \leq l < 1$.

2. Soit (u_n) une suite de réels strictement positive telle que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Montrer que :

* Si $l > 1$ alors $\lim u_n = +\infty$;

* Si $l < 1$ alors $\lim u_n = 0$.

3. Mêmes résultat en remplaçant $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, par $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$.

4. *Applications* : étudier la convergence des suites suivantes :

$$\frac{n^7}{(1,01)^n}; \frac{a^n}{n^p}; \frac{a^n}{n!}; \frac{n^p}{n!}; \frac{n!}{n^{34^n}} \text{ (a réel et p entier naturel donné).}$$

Comparer les vitesses de convergence de a^n , n^p , $n!$ et n^n .

9 Utilisations du théorème de comparaison :

1. Limite de la suite définie par : $x_n = \frac{\ln(2 + \cos n)}{n}$;

2. Pour $1 \leq k \leq n$, encadrer $\frac{n}{n^2 + k}$ par deux expressions indépendantes de k ; en déduire la

limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$;

3. Prouver que si $x \geq 0$ on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. En déduire la limite de la suite définie

par : $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

4. Limite de la suite définie par : $w_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx)$.

10 Suites adjacentes :

1. On considère les suites définies par $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite commune est un nombre irrationnel.

2. Montrer que les suites $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sont adjacentes. En déduire qu'elles sont convergentes. Quelle est leur limite commune ?

11 Soit S_n la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définie pour $n \geq 2$ par $u_n = S_n - \ln n$ et $v_n = S_{n-1} - \ln n$.

1. Montrer que : $\forall x \in [0, 1[, x + \ln(1 - x) \leq 0$ et $x - \ln(1 + x) \geq 0$.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

12 Suites extraites :

1. Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\varphi(n) \geq n.$$

En déduire que si une suite converge vers un réel l toute suite extraite converge vers l (v. cours).

2. Soit (u_n) une suite telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l . Montrer que (u_n) converge vers l .

3. Montrer que si une suite (u_n) n'est pas bornée alors il existe une suite extraite de (u_n) qui tend vers l'infini.

Suites récurrentes :

13 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \sqrt{5 + 2u_n}$.

1. Représenter graphiquement la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{5 + 2x}$ et les premiers termes de la suite (u_n) . Montrer que (u_n) est convergente et trouver sa limite l .

2. Mêmes question en prenant $u_0 = 0$.

3. On veut estimer la vitesse de convergence de la suite (u_n) .

Chercher pour cela un réel k tel que : $0 < k < 1$ et vérifiant : $|u_{n+1} - l| \leq k |u_n - l|$. Conclure.

14 1. Etudier les suites récurrentes définies par :

a/ $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$; **b/** u_0 et a réels > 0 et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a^2}{u_n} \right)$;

c/ $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3 + u_n}$;

d/ $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

2. Plus généralement soit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ suivant que f est croissante ou décroissante sur I . Représenter graphiquement (u_n) dans chaque cas.

15 On considère la suite (u_n) définie par récurrence par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{(1+u_n)^2} \end{cases}$$

1. Etudier la convergence de la suite (u_n) et trouver sa limite éventuelle.

2. Montrer que la suite (v_n) définie, pour $n \geq 1$, par $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}}$ est convergente et trouver la limite.

3. Dédire des questions précédentes que la suite (u_n) est équivalente à $\frac{1}{2n}$.

(Indication : on pourra utiliser le résultat suivant de la feuille d'exercice n° 2 : si une suite (x_n) converge vers l , alors la suite $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ converge aussi vers l).[ex42007]

16 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \in]1, 2[$ et, pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1.$$

1. Représenter graphiquement les premiers termes de cette suite.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 0$ puis pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n \geq 1$.

2. b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

On veut démontrer le résultat précédent d'une autre façon.

3. a. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$|u_{n+1} - 1| \leq (u_n - 1)^2.$$

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq |u_0 - 1|^{2^n}$.

Retrouver le résultat de la question 2/ b/.

3. b. On prend $u_0 = 1,5$. Trouver un entier naturel N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - 1| \leq 10^{-10}. [\text{ex4.2008}]$$

17 Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$. On considère les suites définies par

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Etudier la convergence de (u_n) et (v_n) (on pourra étudier le sens de variation de (u_n) et (v_n) et considérer la suite (t_n) définie par $t_n = u_n - v_n$).

2. Soit la suite (w_n) définie par : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$. Montrer que (w_n) est toujours définie. Calculer w_n en fonction de w_0 et n et en déduire une expression de (u_n) et (v_n) en fonction de a , b et n .

[18] Soit la suite (x_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$.

1. Démontrer que la suite (x_n) est convergente.

2. Soit la suite (y_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $y_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n}$. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes. Retrouver le résultat de la question précédente.

3. Montrer que pour tous entiers naturels non nuls k et n on a l'encadrement :

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k+1}{n}} \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}. \text{ Interpréter graphiquement.}$$

Retrouver que la suite (x_n) est convergente et calculer sa limite.

[19] Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 < u_n < v_n$.

2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l . (l est appelée *moyenne arithmético-géométrique* de a et b).

3. a/ Montrer que pour tous réels x et y tels que $0 < y \leq x$ on a :

$$0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \frac{x-y}{2\sqrt{y}}.$$

En déduire que pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{(v_n - u_n)^2}{8a}.$$

b/ On prend dans la suite $a = 1$ et $b = 2$.

Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{8^{2^n - 1}}.$$

4. Calcul numérique de l :

A l'aide de la calculatrice donner un rang N à partir duquel u_n et v_n sont des valeurs approchées de l à 10^{-10} près. [ex32007]

Histoire des mathématiques : la fonction zêta de Riemann, hypothèse de Riemann.

Elle est définie comme la limite de la suite $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^z}$, notée $\xi(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^z}$. Cette fonction ξ est appelée fonction zêta de Riemann, et elle est définie dans $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Euler (mathématicien suisse, 1707-1783) calcule les valeurs de $\xi(2n)$ pour n entier; ainsi $\xi(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Par contre on ne sait pratiquement rien des réels $\xi(2n+1)$; à la surprise générale le français Roger Apéry a démontré en 1979 que le réel $\xi(3)$ est irrationnel. Cette fonction est très importante car elle est liée à la répartition des nombres premiers dans l'ensemble des nombres réels.

Riemann a conjecturé que les zéros non triviaux de la fonction ξ ont tous une partie réelle égale à $1/2$. Malgré tous les efforts cette conjecture, appelée hypothèse de Riemann, n'a toujours pas été démontrée à l'heure actuelle.