1 Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n^3+\ln n}$; **2.** $\sum_{n\geq 0} e^{-n^2}$; **3.** $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ (on pourra étudier le signe de $t \longmapsto \sqrt{t}-\ln t$);

4. $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$; **5.** $\sum_{n\geq 0} \sqrt{n+\frac{1}{2}}-\sqrt{n}$; **6.** $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}$; **7.** $\sum_{n\geq 0} \sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$ (trouver un équivalent de $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$); **8.** $\sum_{n\geq 0} e^{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$ (calculer la limite de la suite $n^2 e^{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$).

2 Etudier la convergence et calculer eventuellement la somme des séries

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{1}{2^n}.\frac{\pi}{4}\right)$ (vérifier que $\tan x = \operatorname{cotan}(x) - 2\operatorname{cotan}(2x)$);

2. $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

3. $\sum_{n\geq 0} na^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{a^{n+1}}{n+1}$ où a est un réel donné (considérer la fonction f définie par $f(x) = 1+x+\ldots+x^n$).

3 **Critère spécial des séries alternées**

Soit (a_n) une suite réelle telle que :

(i) (a_n) est décroissante; **(ii)** $\lim a_n = 0$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ est convergente (si (S_n) est la suite des sommes partielles, montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes).

2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

4 **1.** Soit (a_n) une suite vérifiant : $\lim_{n\to+\infty} (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) = g,\ g \in]0,+\infty]$.

Prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)} = 1-\frac{1}{g}$ (avec la convention $\frac{1}{+\infty}=0$).

(faire apparaître une "série télescopique").

2. En déduire la somme des séries :

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}$; **b.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2\times 4\times 6\times\ldots\times 2n}$; **c.** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$.

5 FORMULE DE STIRLING

Partie A.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \dfrac{n^{n+1/2}}{n!e^n}$ et $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

1. Montrer que la *série* $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ est convergente si et seulement si la *suite* $\ln(u_n)$ est convergente.

2. A l'aide d'un developpement limité à l'ordre 3, déterminer un équivalent simple à l'ordre 3 en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\ln(1+x) - x.$$

3. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2} \times \frac{1}{e}$.

4. En déduire l'expression de v_n en fonction de n et de f.

Déduire des questions précédentes que $v_n \sim \frac{1}{12n^2}$.

Que peut-on en déduire pour la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$?

5. Montrer qu'il existe un réel strictement positif λ tel que

$$n! \sim \lambda n^{n+1/2}e^{-n}.$$

Partie B : calcul de λ.

On rappelle (devoir 20) que si on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$ on a, pour tout entier naturel n, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

6. Par un procédé "en cascade" montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} . \frac{\pi}{2}.$$

7. En utilisant 5/ donner un équivalent de I_{2n} en fonction de λ.

8. Sachant que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ montrer que $\lambda = \sqrt{2\pi}$.

$\boxed{6}$ Règle d'Alembert

Soit (u_n) une suite de réels strictements positifs telle que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = k \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Montrer que si $k < 1$ la série de terme général u_n est convergente et si $k > 1$ la série de terme général u_n est divergente.

2. Préciser la nature des séries :

a. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{n!}$; **b.** $\sum\limits_{n\geq 1} nx^n$ (x réel donné); **c.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^{n-2}}{e^n n!}$; **d.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^n}{e^n n!}$.

On pourra utiliser, au besoin, la *formule de Stirling* : $n! \sim Cn^n e^{-n}\sqrt{n}$ où $C > 0$ (on peut prouver que $C = \sqrt{2\pi}$).

$\boxed{7}$ Comparaison avec une intégrale

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et g une fonction décroissante de $[n_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que : $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,dt \leq u_n$ et

$$\int_{n_0}^{n} g(t)\,dt \leq \int_{n_0}^{n+1} g(t)\,dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} g(k) \leq \int_{n_0}^{n} g(t)\,dt + g(n_0).$$

Applications : montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ (*séries de Riemann*) est convergente ssi $\alpha > 1$.

2. Montrer que la suite $a_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k - \int_0^n g(t)\,dt$ est positive et décroissante. Conclusion pour la suite (a_n) ?

Applications : montrer que la suite (x_n) définie par $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ est convergente (sa limite se note γ et est appelée *constante d'Euler*).

3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ est divergente.

$\boxed{8}$ Développement décimal illimité d'un rationnel

Soit $x = \dfrac{a}{b}$ un rationnel positif ($a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$). On définit les suites (a_n) et (r_n) d'entiers naturels par la suite de divisions euclidiennes :

$$\begin{aligned} a &= ba_0 + r_0;\ 0 \leq r_0 < b; \\ 10r_0 &= ba_1 + r_1;\ 0 \leq r_1 < b; \\ &\dots \\ 10r_n &= ba_{n+1} + r_{n+1};\ 0 \leq r_{n+1} < b; \end{aligned}$$

1. Montrer que $a_0 = E\left(\frac{a}{b}\right)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq a_n \leq 9$ et

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{a}{b} < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

2. En déduire que le developpement décimal illimité de $\dfrac{a}{b}$ est $a_0, a_1 a_2 \ldots$ et qu'il est périodique à partir d'un certain rang.