I **1.** Montrer que si deux polynômes coïncident en une infinité de points alors ils sont égaux.

2. Montrer que pour tout entier naturel n il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout réel $\theta \in]0, \pi[$:

$$\frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} = Q_n(\cos\theta).$$

3. Etudier le degré, le terme de plus haut degré et la parité de Q_n.

Montrer que possède n racines réelles distinctes deux à deux. En déduire la factorisation de Q_n en produit de polynômes de degré 1 dans $\mathbb{R}[X]$.

II Soit φ l'application de $\mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \varphi(P) = (P(-1), P'(-1), P(1)).$$

1. Montrer que φ est linéaire. Préciser son noyau, une base du noyau et le rang de φ.

(On utilisera les racines de P et leur multiplicité).

Que peut-on en déduire pour φ ?

2. Calculer directement l'image de φ. Quelle est l'image de φ ?

III **Arithmétique dans $K[X]$**

1. Comme dans $\mathbb{Z}$ on définit le pgcd de deux polynômes non nul P et Q : c'est un polynôme D de degré maximum tel que D divise P et Q. Il est défini à une constante multiplicative près.

On peut utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd de deux polynômes :

Exemple : trouver le pgcd de :

$A = X^4 - 4X^3 + 9X^2 - 10X + 4$ et $B = 2X^3 - X^2 - 4X + 3$. .

Remarque : un polynôme Q divise A et B ssi il divise $PGCD(A, B)$.

2. Théorème de Bezout : en utilisant l'algorithme d'Euclide on montre comme dans $\mathbb{Z}$ que deux polynômes A et B sont premiers entre eux (c'est à dire que leur pgcd est égal à 1 ou à une constante non nulle) ssi il existe deux polynômes U et V tels que :

$$1 = AU + BV.$$

Trouver deux tels polynômes pour : $A = X^3 + 2X^2 + X - 1$ et $B = X^3 + X^2 - X - 1$.

3. Applications de Bezout : on déduit du théorème de Bezout :

a/ si A divise BC et si A est premier avec B alors A divise C (*théorème de Gauss*)

b/ si A est premier avec B et C alors il est premier avec BC.

c/ si A et B divisent C et si A et B sont premiers entre eux alors AB divise C.

Application : si P a pour racines $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_q$ (distinctes deux à deux) de multiplicité respectives $k_1, \ldots, k_q$ alors P est divisible par $\prod_{i=1}^{q} (X - \alpha_i)^{k_i}$.

$\boxed{\text{IV}}$ Relation entre coefficients et racines

1. Soit $P = aX^2 + bX + c$ (avec a, b, c complexes, $a \neq 0$). Montrer que les complexes x_1 et x_2 sont racines de P ssi $\boxed{x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \text{ et } x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}}$. On a alors : $aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$.

Exemple : résoudre sans calculs l'équation : $2x^2 - x - 3 = 0$.

De même les complexes x_1, x_2 et x_3 sont racines de $P = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ ssi $x_1 + x_2 + x_3 = -a_2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a_1$ et $x_1x_2x_3 = -a_0$. Alors $X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$.

2. *Cas général* : soit un polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ et x_1, x_2,..., x_n ses n racines (complexes), chacune d'elle étant écrite autant de fois que son ordre de multiplicité.

On a donc : $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 = (X - x_1)(X - x_2)...(X - x_n)$.

En développant et en identifiant les coefficients on trouve :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_1 &= \sum x_i = -a_{n-1}, \\
\boldsymbol{\sigma}_2 &= \sum_{i<j} x_i x_j = a_{n-2}, \\
\boldsymbol{\sigma}_3 &= \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = -a_{n-2}, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\sigma}_n &= \prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n a_0
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 &= (X - x_1)(X - x_2)...(X - x_n) \\
&= X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + ... + (-1)^n \sigma_n.
\end{aligned}
$$

Réciproquement si les nombres x_1, x_2,..., x_n vérifient les relations **(*)** précédentes alors ils sont racines du polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 = X^n - \boldsymbol{\sigma}_1 X^{n-1} + \boldsymbol{\sigma}_2 X^{n-2} + ... + (-1)^n \boldsymbol{\sigma}_n$.

$\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_n$ sont appelées *fonctions symétriques des racines* de P.

3. Exemples et applications :

a. Soient a, b et c les racines de $x^3 + px + q$. Calculer en fonction de p et q :
$a^2 + b^2 + c^2$; $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$; $a^3 + b^3 + c^3$.

Soit l'équation $X^3 - 2X^2 + X + 1 = 0$ et x_1, x_2 et x_3 ses racines (réelles ou complexes); former une équation du troisième degré ayant pour racines x_1^2, x_2^2, x_3^2. Même question avec $\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}, \dfrac{1}{x_3}$.

b. Résoudre le système dans $\mathbb{C}^3$: $\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &=& 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} &=& 1 \end{array}\right.$ (prendre pour inconnues $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + xz$, et $\sigma_3 = xyz$).