$\boxed{1}$ Résoudre dans $K[X]$ les équations d'inconnue P :

1. $P'^2 = 4P$ (considérer le degré de P);

2. $(X^2+1)\,P" = 6P$ (considérer les termes de plus haut degré).

$\boxed{2}$ Calculer : $P_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ et $P_1 = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$.

$\boxed{3}$ **Divisibilité; division euclidienne**

1. Quel est le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $X-a$? Par $(X-a)^2$? Par $(X-a)^n$?

2. Quel est le reste de la division euclidienne de $(\cos\alpha + X\sin\alpha)^n$ par X^2+1 ?

3. Trouver un polynôme à coefficients entiers ayant pour racine $1+\sqrt{3}$.

Calculer la valeur numérique du polynôme $P = 2X^4 - 4X^3 - 7X - 14$ quand on remplace X par $1+\sqrt{3}$.

4. Déterminer un polynôme P vérifiant la propriété $(*)$: le reste de la division euclidienne de P par $X-1$ est 2 et le reste de la division euclidienne de P par $X-2$ est 1. Quel est alors le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)$?

Quels sont tous les polynômes vérifiant la propriété $(*)$?

5. Dans quel cas $P = X^n + a^n$ est-il divisible par X^2+X+1 ? Même question avec $P = X^{2n} + X^n + 1$.

6. Déterminer a et b pour que le polynôme $A = aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$.

$\boxed{4}$ **Racines d'un polynôme; décomposition**

1. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.

2. Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$: X^8+1 et X^8+X^4+1.

3. Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $2X^3 - (5+6i)X^2 + 9iX + 1 - 3i$ sachant qu'il admet une racine réelle.

4. Factoriser le polynôme $z^3 + (2-11i)z^2 - (39+12i)z - 18 + 45i$ sachant qu'il a une racine double.

5. Déterminer a, b et c réels pour que le polynôme $P = X^6 - 5X^4 - aX^2 + bX + c$ admette une racine d'ordre 4.

6. **a/** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 + z + z^2 + \ldots z^{n-1} = 0$.

b/ En déduire la factorisation du polynôme $1 + z + z^2 + \ldots z^{n-1}$.

En déduire la relation : $\frac{n}{2^{n-1}} = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

7. Montrer que le polynôme $1 + X + \frac{X^2}{2!} + \ldots \frac{X^n}{n!}$ n'a que des racines simples.

8. Trouver les racines du polynôme $P = 9X^3 - 51X^2 + 88X - 48$ sachant qu'il a une racine multiple.

9. Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 1$.

10. Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = (X+i)^n - (X-i)^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ et en déduire une expression de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \cot\text{an}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.

11. Soit P_n le polynôme $(X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, P_n est divisible par $(X^2+X+1)^2$.

12. Soit P un polynôme de degré ≥ 2 à coefficients réels, scindé et n'ayant que des racines simples; montrer que P' est scindé (appliquer le théorème de Rolles).

$\boxed{5}$ Polynômes et algèbre linéaire

Soit n un entier ≥ 2 et E_n l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à n. Soit l'application f qui au polynôme P associe le polynôme Q tel que :

$$Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E_n.

2. Calculer $f(X^p)$ pour p entier tel que $0 \leq p \leq n$; quel est son degré ?

Comparer le degré de $P \in E_n$ et le degré de $f(P)$.

En déduire le noyau de f et sa dimension puis le rang de f.

3. Trouver une base de $\operatorname{Im} f$ puis $\operatorname{Im} f$. Retrouver le rang de f.

4. Soit Q un polynôme de degré $\leq n-2$.

Montrer qu'il existe un polynôme unique $P \in E_n$ tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Quel est l'ensemble des antécédents de Q par f ?

Historique : la théorie des équation polynomiales a été le propos essentiel de l'algèbre jusqu'au XIXe siècle. Elle est à l'origine de nombreuse notions : corps, nombres algébriques ... Dès la plus haute Antiquité on rencontre des exemples de résolutions d'équations : les Babyloniens savent résoudre l'équation du second degré et les Grecs en font la base même de leur géométrie.

Après l'Antiquité il faudra attendre le XVIe siècle pour que des progrès substanciels apparaissent grâce à l'école italienne : Scipione del Ferro, Tartaglia et Cardan résolvent l'équation du troisième degré.

En XVIIe siècle la majorité des mathématiciens est convaincue qu'une équation de degré n possède n racines, celles-ci pouvant ne pas être réelles, mais il faut attendre d'Alembert pour trouver en 1724 une définition précise des nombres complexes (sous la forme a + $\sqrt{-1}$b). En 1799 Gauss fournit plusieurs preuves rigoureuses du "théorème d'Alembert-Gauss".

Abel donne une démonstration rigoureuse de l'impossibilité de résoudre par radicaux l'équation générale de degré cinq en 1829. En introduisant la notion de groupe, Galois énonce une condition générale à laquelle satisfait toute équation résoluble par radicaux (1831).

La définition formelle des polynômes se dégage progressivement tout au long du XIXe siècle.

Evariste Galois : le 30 mai 1832 un jeune révolutionnaire de 21 ans est blessé au cours d'un duel; il meurt le lendemain d'une péritonite et est enterré dans la fosse commune du cimetière de Montparnasse. La veille de sa mort il résume fiévreusement à un ami ses travaux en quelques pages. Ceux-ci ne seront compris et reconnus qu'en 1843 lorsque Liouville les expose devant l'Académie. Ces travaux concernaient l'impossibilité de résoudre par radicaux une équation algébrique générale de degré supérieur ou égal à 5. Ils ouvrirent la voie à la création d'une branche des mathématiques : la théorie des groupes. Ce génial mathématicien s'appelait Evariste Galois.

La théorie des groupes a des applications importantes dans des domaines aussi variés que l'arithmétique, la cristallographie, la physique des particules et jusqu'aux configurations possibles du Rubik-cube ! La définition générale et moderne des groupes a été donnée en 1902 par Edward Huntington.