

But du problème : approcher une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ par une fonction polynôme.

Plus précisément on choisit une subdivision de $n + 1$ points $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ de $[a, b]$ et on considère le polynôme $P \in K[X]$ de degré $\leq n$ (dont on établit l'existence et l'unicité) qui prend les mêmes valeurs que f en ces points. On donne ensuite une majoration de $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)|$.

Dans les quatre questions suivantes on considère $n + 1$ scalaires distincts deux à deux $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $n + 1$ scalaires quelconques v_0, v_1, \dots, v_n .

On considère le problème suivant :

Trouver les polynômes P de $K_n[X]$ vérifiant $P(\alpha_i) = v_i$ pour $0 \leq i \leq n$. (*)

1. Montrer que si P existe il est unique.
2. Soit Φ l'application de $K_n[X]$ dans K^{n+1} définie par :

$$\Phi : \begin{matrix} K_n[X] & \longrightarrow & K^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)) \end{matrix} .$$

- a. Montrer que Φ est linéaire et injective. Que peut-on en déduire pour Φ ?
 - b. En déduire qu'il existe une unique solution au problème (*).
 - c. Ecrire la matrice de Φ dans les bases canoniques de $K_n[X]$ et de K^{n+1} .
3. Trouver les polynômes L_i (pour $i \in \{0, \dots, n\}$) tel que

$$L_i(\alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

En déduire la solution du problème (*) (chercher P comme combinaison linéaire des L_i).

4. Que peut-on dire de la famille (L_i) ($0 \leq i \leq n$) pour l'espace vectoriel $K_n[X]$?

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, b]$ et $n + 1$ points fixés de I et deux à deux distincts $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. L'unique polynôme P_n de degré $\leq n$ tel que $P_n(\alpha_i) = f(\alpha_i)$ pour tout i de $\{0, \dots, n\}$ s'appelle *polynôme d'interpolation de Lagrange de f relativement à la subdivision $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$* .

5. On suppose f de classe C^{n+1} sur I . Montrer que si $M_{n+1} = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$ on a pour tout x de I :

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)|.$$

(Indication : pour x fixé distinct de $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ considérer l'application $\varphi(t) = f(t) - P_n(t) - k(t - \alpha_0)(t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_n)$, k étant choisi tel que $\varphi(x) = 0$, et montrer que φ s'annule $n + 2$ points distincts).