

1 1. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

2. Même question pour $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

2 1. Montrer qu'entre deux réels distincts il y-a au moins un rationnel (on dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

2. Montrer qu'entre deux réels distincts il y-a au moins un irrationnel (*indication* : le chercher sous la forme $r\sqrt{2}$, où r appartient à $\mathbb{Q}$).

3 Soit A l'ensemble des nombres rationnels positifs inférieurs à $\sqrt{2}$. Montrer que A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (on raisonnera par l'absurde en supposant que A a une borne supérieure M appartenant à $\mathbb{Q}$ et on montrera que l'on ne peut avoir ni $M > \sqrt{2}$ ni $M < \sqrt{2}$).

4 1. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un majorant x_0 de A , appartenant à A . Montrer que x_0 est la borne supérieure de A . On dit que x_0 est le *plus grand élément* de A et on note $x_0 = \max A$.

De même s'il existe un minorant y_0 de A appartenant à A alors y_0 est la borne inférieure de A . On dit que y_0 est le plus petit élément de A et on note $y_0 = \min A$.

2. *Passage au sup et à l'inf dans une inégalité* : soit A une partie de $\mathbb{R}$ et l un nombre réel. On suppose que :

$$\forall x \in A, x \leq l \text{ (ou } x < l). \text{ Montrer qu'alors : } \sup A \leq l.$$

De même montrer que si : $\forall x \in A, x \geq l$ (ou $x > l$). Montrer qu'alors $\inf A \geq l$.

Montrer sur des exemples que seules les inégalité larges se conservent par passage au sup et à l'inf.

3. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y \text{ (ou } x < l)$$

Montrer qu'alors : $\sup A \leq \inf B$.

4. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b/a \in A \text{ et } b \in B\}$. On suppose que A et B sont majorés. Montrer que $A + B$ est majoré et que :

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

5. Trouver le sup et l'inf des ensembles suivants :

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n/n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}; B = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m}/n \mid n \text{ et } m \text{ dans } \mathbb{N}^* \right\}.$$

5 **Partie entière d'un réel** : la *partie entière* d'un réel x est l'entier relatif notée $E(x)$ ou $[x]$ et vérifiant : $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

($E(x)$ est donc le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x).

1. Calculer $E(3)$, $E(1,7)$, $E(-1,7)$.

2. Montrer que pour tout réel x et tout entier relatif n on a : $E(x + n) = E(x) + n$.

3. Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto E(x)$ (montrer qu'elle est croissante).

4. Représenter graphiquement pour la fonction $x \mapsto E\left(\frac{1}{x}\right)$.
5. Montrer que pour tous réels x et y on a : $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
6. Montrer que pour tous entiers relatifs n et m on a : $E\left(\frac{n+m}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = n$.
(*indication* : distinguer les cas $n+m$ pair et $n+m$ impair).
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

En déduire la valeur de $E\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Valeurs absolues

6 Inégalité triangulaire : démontrer que pour tous réels x et y :

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad (\text{indication : élever au carré}).$$

Plus généralement, pour tous réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ on a : $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$.

En déduire que pour tous réels x et y : $|x-y| \geq ||x| - |y||$ (*indication* : écrire $|x| = |x-y+y|$).

Application : sachant que $1 \leq |a| \leq 3$ et $5 \leq |b| \leq 7$ donner un encadrement de $\frac{a+2b}{b-a}$.

Inégalités

7 Démontrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout réel x : $e^x \geq 1+x$. Illustrer graphiquement.

2. Pour tous réels a et b :

$$\mathbf{a.} \quad ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}; \quad \mathbf{b.} \quad a+b < 2 + a^2 + b^2; \quad \mathbf{c.} \quad a+b < (1+a^2)(1+b^2).$$

3. Pour tous réels a, b et c : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

4. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, (n-1)a^n + b^n \geq na^{n-1}b$.

(*indication* : faire intervenir $x = \frac{a}{b}$).

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, : \prod_{k=1}^n (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $a_1, a_2, \dots, a_n$ réels supérieurs ou égaux à 1 :

$$n + \prod_{k=1}^n a_k \geq 1 + \sum_{k=1}^n a_k.$$

$$6. \quad \forall n \in \mathbb{N}, \prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^{i+1}}\right)^2 \geq 2n + 3.$$

7. En utilisant l'égalité : $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ montrer que le produit de deux nombres dont la somme est constante est maximum quand ils sont égaux et que la somme de deux nombres positifs dont le produit est constante est minimum quand ils sont égaux.

8. Pour tout réel $x, x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. En déduire que pour tous réels a, b et c appartenant à $[0;1]$ un au moins des réels $a(1-b), b(1-c), c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

L'âge d'or des mathématiques : où placer l'âge d'or des mathématiques ? Malgré les idées reçues cet âge n'est ni au temps d'Euclide (où furent établies les bases logiques du raisonnement géométrique), ni la Renaissance (avec l'éclosion de l'algèbre), ni au temps de Descartes (inventeur de la géométrie analytique), ni celui de Newton et de Leibniz (qui créent le calcul différentiel), ni le XVIIIe siècle; s'il y a un âge d'or des mathématiques ce n'est aucun de ceux-là mais c'est l'époque actuelle. On a inventé plus de mathématique pendant ces 50 dernières années qu'au cours de toutes les époques passées. On compte actuellement plus de 1500 revues consacrées aux recherches mathématiques et elles publient chaque année plus de 250

000 articles dans au moins 100 langues différentes. Le domaine des mathématiques devient très large et il est difficile d'en avoir une vue d'ensemble pour une seule personne (on dit que Poincaré, mathématicien français du début du XXe siècle, fut la dernière personne à comprendre l'ensemble des mathématiques de son époque).