

1 Ecrire les matrices A des applications linéaires suivantes dans les bases proposées :

1. $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui à (x, y, z) associe $(x + y + z, x - y + z, x + 2z)$; bases canoniques de $\mathbb{R}^3$;

2. $s : \vec{E} \longrightarrow \vec{E}$ (vecteurs de l'espace), symétrie orthogonale par rapport au plan P d'équation $x + y - z = 0$ (dans une base orthonormée directe $(b) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$). Ecrire ensuite la matrice de s dans une base mieux adaptée;

3. $v : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ qui à P associe P' . Calculer A^2, A^3, A^4 et interpréter.

4. $w : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$, qui à P associe $(X^2 + 1)P'$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et de $\mathbb{R}_3[X]$. Trouver $\ker w$, $\text{Im } w$ et $\text{rg } w$.

2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, somme directe de deux sous-espace vectoriel F et G et p la projection sur F parallèlement à G .

1. Trouver une base de E dans lesquelles la matrice M de p soit "simple".

Vérifier que $MM = M$. Pouvaient-on prévoir ce résultat ?

Soit s la symétrie part rapport à F parallèlement à G .

2. Trouver une base de E dans lesquelles la matrice S de s soit "simple".

Vérifier que $S^2 = I_n$. Pouvaient-on prévoir ce résultat ?

3 Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $u^2 = -Id_E$.

1. Montrer que u est bijectif.

2. Montrer que si les $2p - 1$ vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p, u(x_1), \dots, u(x_{p-1})$ sont libres sont libres il en est de même des $2p$ vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p, u(x_1), \dots, u(x_p)$.

3. En déduire que la dimension de E est paire et que E possède une base $(x_1, x_2, \dots, x_p, u(x_1), \dots, u(x_p))$. Trouver la matrice de u dans cette base.

4 Dans $\mathbb{R}^3$ trouver la matrice de passage P de la base canonique à la base $f_1 = (0, 1, 1)$, $f_2 = (1, 0, 1)$, $f_3 = (1, 1, 0)$. Calculer P^{-1} .

Trouver les composantes de $V = (1, 2, -1)$ dans la nouvelle base (f_1, f_2, f_3) .

5 Soit $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit $B' = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la base de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f_1 = e_1 - e_2, f_2 = e_2 - e_3, f_3 = e_3 - e_4, f_4 = e_4.$$

1. Vérifier que B' est bien une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice associée à une application linéaire u de $\mathbb{R}^4$ dans

lui-même, muni de la base B . Trouver la matrice de u dans la base B' .

6 Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par rapport aux bases canoniques (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_3 + e_1$, $e'_3 = e_1 + e_2$.

Quelle est la matrice de u dans les bases (e'_1, e'_2, e'_3) et (f_1, f_2) ?

2. On choisit ensuite pour base de $\mathbb{R}^2$ la base $f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$, $f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$ en gardant dans $\mathbb{R}^3$ la base (e'_1, e'_2, e'_3) . Quelle est la matrice de u dans ces bases ?

7 Montrer que l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Préciser sa dimension et en donner une base.

8 Inverser les matrices suivantes :

$$\mathbf{a}/ A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (\text{indication : considérer l'application } P \longmapsto P(X+1))$$

dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$;

$$\mathbf{b}/ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{montrer que } C^2 - 4C + 3I_2 = 0);$$

9 Soit $M = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n .

On appelle *trace* de M le scalaire $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ (ie la somme de ses éléments diagonaux de M).

1. Montrer que pour tout scalaire λ et toutes matrices carrées M et N d'ordre n on a: $\text{Tr}(\lambda M) = \lambda \text{Tr}(M)$, $\text{Tr}(M + N) = \text{Tr}(M) + \text{Tr}(N)$ et $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$.

Montrer que deux matrices semblables ont même trace.

2. Soit u un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension n .

Comment peut-on définir la trace de u ?

3. Quelle est la trace de f , projection sur F parallèlement à G , sous-espaces vectoriels de E de dimension p et q ?

Même question avec s , symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G .

10 La matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en multipliant la i -ième ligne par λ s'appelle *matrice de dilatation* et de note $D_i(\lambda)$.

La matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en échangeant la i -ième ligne et la j -ième ligne ($i \neq j$) s'appelle *matrice de permutation* et de note $P_{i,j}$.

La matrice $I_n + \lambda E_{i,k}$ ($i \neq k$) s'appelle *matrice de transvection* et se note $T_{i,k}(\lambda)$.

Les matrices $D_i(\lambda)$, $P_{i,j}$ et $I_n + \lambda E_{i,k}$ sont inversibles car elle se ramènent à la matrice identité par une opération élémentaire sur les lignes.

1. Soit M une matrice carrée (n, n) . Montrer que effectuer

- $D_i(\lambda)M$ revient à multiplier la i -ième ligne de M par λ ;
- $P_{i,j}M$ revient à échanger les lignes i et j ;
- $T_{i,k}(\lambda)M$ revient à ajouter à la i -ème ligne, λ fois la k -ième.

En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que PM soit échelonnée par lignes.

2. En considérant les produits à droite $MD_i(\lambda)$, $MP_{i,j}$ et $MT_{i,k}(\lambda)$ montrer de même qu'il existe une matrice P' inversible telle que MP' soit échelonnée par colonnes.