RESUME DE COURS

$\boxed{1}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3 puis A^n $(n \in \mathbb{N})$ par récurrence.

En écrivant $A = I_2 + J$ retrouver ce résultat (utiliser la formule du binôme de Newton en rappelant ses conditions d'applications).

$\boxed{2}$ Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ecrire $A = 3I_3 + J$. Calculer J^2. En déduire A^n et A^{-1}.

$\boxed{3}$ Soit C l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec a et b réels.

Montrer que C est un sous-espace vectoriel de $M(2,2)$ espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Donner sa dimension et une base.

Trouver un isomorphisme de C sur un ensemble connu.

$\boxed{4}$ Montrer que l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Préciser sa dimension et en donner une base.

$\boxed{5}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$.

Calculer A^{-1} et A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{6}$ Inverser les matrices suivantes :

a. $A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n-2}{1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix}$ (indication : considérer l'application $P \longmapsto P(X+1)$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$);

b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (montrer que $C^2 - 4C + 3I_2 = 0$).

$\boxed{7}$ On considère les trois suite $(x_n), (y_n)$ et (z_n) définies par leur premier terme x_0, y_0 et z_0 et par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} &= \frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ z_{n+1} &= \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{2}{3}z_n \end{cases}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

Déterminer $A \in M_{\mathbb{R}}(3,3)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n.$$

2. En utilisant la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire en fonction de n l'expression de x_n, y_n et z_n.

4. En déduire la limite des suites $(x_n), (y_n)$ et (z_n).

$\boxed{8}$ Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E tel que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$.

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que le système $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E et écrire la matrice de u dans cette base.

$\boxed{9}$ Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $u^2 = Id_E$.

1. Montrer que $E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E)$.

2. En déduire une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale très simple.

$\boxed{10}$ Trouver les noyaux et images des endomorphismes représentés par leurs matrices dans les bases canoniques :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; **2.** $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

$\boxed{11}$ Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F de dimensions finie n et p respectivement. On suppose f de rang r. Montrer qu'il existe des bases (e) et (f) de E et F tels que f ait pour matrice : $\begin{pmatrix} I_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ où I_r est la matrice identité de rang r.

$\boxed{12}$ Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$ (a réel donné).

$\boxed{13}$ Dans $\mathbb{R}^3$ trouver la matrice de passage P de la base canonique à la base $f_1 = (0,1,1)$, $f_2 = (1,0,1)$, $f_3 = (1,1,0)$. Calculer P^{-1}.

Trouver les composantes de $V = (1,2,-1)$ dans la nouvelle base (f_1, f_2, f_3).

$\boxed{14}$ Soit u un endomorphisme de E représenté par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans une base $(e) = (e_1, e_2, e_3)$. Soient f_1, f_2, f_3 les vecteurs de coordonnées $(1,1,1)$, $(-1,1,0)$ et $(-1,0,1)$ respectivement dans la base (e).

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E et déterminer la matrice B de u dans cette base.

2. Utiliser la question précédente pour calculer A^n.

$\boxed{15}$ Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par rapport aux bases canoniques (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_3 + e_1$, $e'_3 = e_1 + e_2$.

Quelle est la matrice de u dans les bases (e'_1, e'_2, e'_3) et (f_1, f_2) ?

2. On choisit ensuite pour base de $\mathbb{R}^2$ la base $f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$, $f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$ en gardant dans $\mathbb{R}^3$ la base (e'_1, e'_2, e'_3).

Quelle est la matrice de u dans les bases (e'_1, e'_2, e'_3) et $\left(f'_1, f'_2\right)$?

$\boxed{16}$ Soit $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit $B' = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la base de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f_1 = e_1 - e_2, f_2 = e_2 - e_3, f_3 = e_3 - e_4, f_4 = e_4.$$

1. Vérifier que B' est bien une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice associée à une application linéaire u de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même, muni de la base B. Trouver la matrice de u dans la base B'.

$\boxed{17}$ Soit $M(n,p)$ l'espace vectoriel des matrices de type (n,p).

1. Quelle est la dimension de $M(n,p)$?

2. Soient S_n l'ensemble des matrices symétriques et A_n l'ensemble des matrices anti-symétriques d'ordres n.

a. Montrer que S_n et A_n sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $M(n,n)$.

b. Déterminer une base de S_n et une base de A_n en utilisant la base canonique de $M(n,n)$.

c. En déduire que $\dim A_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $\dim S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$\boxed{18}$ La matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en multipliant la i-ième ligne par λ s'appelle *matrice de dilatation* et de note $D_i(\lambda)$.

La matrice obtenue à partir de la matrice identité I_n en échangeant la i-ième ligne et la j-ième ligne $(i \neq j)$ s'appelle *matrice de permutation* et de note $P_{i,j}$.

La matrice $I_n + \lambda E_{i,k}$ $(i \neq k)$ s'appelle *matrice de transvection* et se note $T_{i,k}(\lambda)$.

Les matrices $D_i(\lambda), P_{i,j}$ et $I_n + \lambda E_{i,k}$ sont inversibles car elle se ramènent à la matrice identité par une opération élémentaire sur les lignes.

1. Soit M une matrice carrée (n,n). Montrer que effectuer

- $D_i(\lambda) M$ revient à multiplier la i-ième ligne de M par λ;

- $P_{i,j}M$ revient à échanger les lignes i et j;

- $T_{i,k}(\lambda) M$ revient à ajouter à la i-ème ligne, λ fois la k-ième.

En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que PM soit échelonnée par lignes.

2. En considérant les produits à droite $MD_i(\lambda)$, $MP_{i,j}$ et $MT_{i,k}(\lambda)$ monter de même qu'il existe une matrice P' inversible telle que MP' soit échelonnée par colonnes.

Un peu d'histoire : c'est James Sylvester (1814-1897) qui a utilisé pour la première fois, en 1850, le mot matrice (matrix) dans un article. En 1810 Carl Friedrich Gauss (1777-1855) met en place la méthode du "pivot de Gauss" pour résoudre un système. Quelques années plus tard Gauss imagine une méthode itérative plus rapide utilisant des puissances de matrices. Elle sera mise au point en 1847 par Ludwig Seidel (1821-1896). Cette méthode est encore utilisée aujourd'hui pour résoudre de façon approché des systèmes linéaires.