

1 Formule des trois niveaux

Montrer que pour tout polynôme f de degré ≤ 3 on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

2 Calculer les primitives suivantes :

a. $\int e^x \cos 2x dx$. En déduire $I = \int e^x \cos^2 x dx$ et $J = \int e^x \sin^2 x dx$;

b. $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$;

c. $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 5} dx$;

d. $\int_0^1 x^n \log x$ (on donnera un sens à cette intégrale);

e. $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ (trouver une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n).

2 Déterminer la limite éventuelle des suites suivantes :

a/ $\frac{1}{n!} \int_0^1 (\arcsin x)^n dx$; b/ $\int_0^{\pi/2} n^\alpha \sin^n x \cos x dx$; c/ $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx} dx$ où f est une fonction continue sur $[0, 1]$.

3 Pour tout entier naturel n on pose $J_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$.

1. Calculer J_1 , $J_0 + J_1$ puis J_0 . Pour tout n calculer $J_n + J_{n+1}$.

2. Sans calculer J_n montrer que la suite (J_n) est croissante. En déduire que cette suite diverge vers plus infini.

3. Montrer directement que la suite (J_n) tend vers $+\infty$ en minorant J_n (*indication* : encadrer $e^x + 1$).

4 Montrer que pour tout entier $n > 0$, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$.

(Considérer la fonction f définie par $f(t) = (1+t)^n$).

5 Sommes de Riemann. Trouver la limite des suites suivantes :

a/ $\sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$; b/ $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$; c/ $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin \frac{k\pi}{n+1}$; d/ $\frac{1}{n} [(n+1)(n+2) \dots (n+n)]^{1/n}$;

e/ $\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n E(\sqrt{k})$.

6 Pour $|x| \neq 1$ on pose $I(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos t + x^2) dt$.

1. Pour quelles valeurs de x cette intégrale a-t-elle un sens ?
2. Montrer que $I(-x) = I(x)$ pour tout réel x tel que $|x| \neq 1$.
3. Calculer $I\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $I(x)$ pour $x \neq 0$ et $|x| \neq 1$.

4. Calculer $I(x^2)$ en fonction de $I(x)$.

En admettant que la fonction $x \mapsto I(x)$ est continue en déduire la valeur de $I(x)$ pour $|x| \neq 1$.

5. Retrouver ce dernier résultat en calculant $\frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 - 2x \cos \frac{2k\pi}{n} + x^2 \right)$.

7 Soit F l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$ Soit C_f son graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. a/ Montrer que F est bien définie et que F est impaire.
- b/ Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$; calculer $F'(x)$ et dresser le tableau de variation de F (on ne demande pas ici les limites aux bornes).
2. A partir d'un encadrement de F déduire l'existence et la valeur de la limite de F en $\pm\infty$.
3. Calculer le développement limité de F' à l'ordre 4 en 0 et en déduire que F admet un développement limité à l'ordre 5 en 0. Donner ce développement.
4. Montrer que la fonction $F(x)/x$ définie sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

5. a/ Montrer que pour tout réel t on a :

$$t^2 \leq \sqrt{t^4 + t^2 + 1} \leq t^2 + 1$$

En déduire que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$\arctan 2x - \arctan x \leq F(x) \leq \frac{1}{2x}$$

b/ En utilisant l'identité : $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$ montrer que $F(x) \sim \frac{1}{2x}$ au voisinage de $+\infty$.

6. a/ Démontrer que pour tout réel non nul x on a : $F(x) = F\left(\frac{1}{2x}\right)$.

b/ En déduire le développement généralisé de F au voisinage de $+\infty$ jusqu'aux termes en $1/x^5$ et montrer que C_F admet un hyperbole asymptote au voisinage de $+\infty$.

Préciser la position relative de cette asymptote par rapport à C_F .

Donner l'allure du graphique C_F de F .

8 Soit f la fonction de la variable réelle définie par $f(x) = -1$ si $x < 0$, $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

Etudier la fonction φ définie pour tout x réel par $\varphi(x) = \int_{1-x}^{1+x} f(x) dx$.

Tracer son graphique; étudier la continuité et la dérivabilité de φ .

Bref historique : la théorie de l'intégration naît du calcul d'aire d'une surface. Archimède savait déjà calculer l'aire d'une surface délimitée par une droite et une parabole.

Au milieu du XVII-ième siècle Newton et Leibniz fondèrent le calcul différentiel. Newton calcule l'aire délimitée par une courbe $y=f(x)$ en inversant les opérations de dérivation. Leibniz interprète les aires comme des sommes de rectangles infinitésimaux. C'est en 1823 que Cauchy rassemble leurs résultats et donne une définition précise de l'intégrale et Riemann développe la théorie de l'intégration (1854). Enfin Henri Lebesgue, dans sa thèse de 1902, présente ses idées révolutionnaire de la notion d'intégrale. Il donne une définition plus générale de la notion de mesure et d'intégrale qui simplifie l'énoncé de nombreux théorèmes.