

Corrigé

Idée générale : on considère une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ et on veut calculer une valeur approchée de $I = \int_a^b f(t) dt$. Pour cela on considère une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de l'intervalle $[a, b]$ ($x_0 = a, x_n = b$) et on approche sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ ($0 \leq i \leq n-1$) la fonction f par des fonctions polynômes P_i et l'intégrale de f sur $[x_i, x_{i+1}]$ par l'intégrale de P_i . On prendra donc pour valeur approchée de I :

$$I \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(t) dt, \text{ l'erreur étant } e = \left| I - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(t) dt \right|.$$

$$\text{Montrer que : } e \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(t) - P_i(t)) dt \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t) - P_i(t)| dt.$$

Dans la suite on prendra une subdivision régulière si bien que $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ ($0 \leq i \leq n-1$) et $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$.

1 Méthode des rectangles

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on approche la fonction f par la fonction constante (i.e le polynôme P_i est de degré 0) : $f(\xi_i)$ où $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ l'intégrale de f est donc remplacée par $(x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$ (aire du rectangle de base ξ_i de hauteur $f(\xi_i)$) et une valeur approchée de I est donc :

$$R_n = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i).$$

Majoration de l'erreur. On suppose f de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que pour tout t de $[x_i, x_{i+1}]$ on a : $|f(t) - f(\xi_i)| \leq M_1 |t - \xi_i|$ où $M_1 = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|$. En déduire que :

$$e = |R_n - I| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{n}.$$

On prend maintenant $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ = milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Montrer que l'on a alors :

$$e = \left| I - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(m_i) \right| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{4n} \text{ (méthode du point médian).}$$

On suppose f de classe C^2 sur $[a, b]$. Soit $M_2 = \sup_{t \in [a, b]} |f''(t)|$. Montrer que :

$$e = \left| I - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(m_i) \right| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

(appliquer la formule de Taylor-Lagrange à f au point m_i).

2 Méthode des trapèzes

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on approche maintenant la fonction f par la fonction affine (i.e le polynôme P_i est de degré 1) qui prend les mêmes valeurs que f aux points x_i et x_{i+1} . P_i est donc le polynôme d'interpolation de Lagrange de f pour la subdivision (x_i, x_{i+1}) .

Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ l'intégrale de f est remplacée par $(x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$ (= aire du trapèze de bases $f(x_i)$ et $f(x_{i+1})$) et une valeur approchée de I est :

$$T_n = \frac{b-a}{2n} [f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)].$$

1. Montrer qu'il existe $\theta_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que $f(\theta_i) = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$. La méthode des trapèzes apparaît donc comme une méthode particulière des rectangles.

Majoration de l'erreur. On suppose f de classe C^2 sur $[a, b]$. Soit $M_2 = \sup_{t \in [a, b]} |f''(t)|$. Montrer que :

$$e = |I - T_n| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

(On rappelle que pour tout x et $[a, b]$ on a la majoration : $|f(x) - P_i(x)| \leq \frac{M_2}{2!} |(x - x_i)(x - x_{i+1})|$).

3 Méthode de Simson

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on approche la fonction f par la fonction polynôme de degré 2, P_i , qui prend les mêmes valeurs que f aux points x_i , $m_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ et x_{i+1} (P_i est donc le polynôme d'interpolation de Lagrange de f pour la subdivision (x_i, m_i, x_{i+1})). On rappelle que pour tout polynôme g de degré ≤ 3

on a la formule des 3 niveaux (voir feuille 21, I/) : $\int_a^b g(t) dt = \frac{b-a}{6} (g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b))$.

Montrer que I est alors approché par :

$$S_n = \frac{b-a}{6n} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(b) \right].$$

Majoration de l'erreur :

a/ on suppose f de classe C^4 sur $[a, b]$. Soit $M_4 = \sup_{t \in [a, b]} |f^{(4)}(t)|$. Déterminer le polynôme Q_i de degré ≤ 3 vérifiant : $Q_i(x_i) = f(x_i)$, $Q_i(m_i) = f(m_i)$, $Q_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ et $Q'_i(m_i) = f'(m_i)$.

b/ Montrer que $\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(t) dt = \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_i(t) dt$.

c/ Pour $x \in [a, b] - \{x_i, m_i, x_{i+1}\}$ on pose $\varphi(t) = f(t) - Q_i(t) - \beta N(t)$ où $N(t) = (t - x_i)(t - m_i)^2(t - x_{i+1})$, le réel β étant choisi tel que $\varphi(x) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\beta = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}$.

En déduire que $|f(x) - Q_i(x)| \leq \frac{M_4}{24} |N(x)|$ puis que :

$$e = |I - S_n| \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{2880n^4}.$$

4 Comparaison des méthodes

Soient R_n , T_n et S_n les valeurs approchées de I obtenues par les méthodes des rectangles (avec le point m_i), trapèzes et Simson.

Montrer que $S_n = \frac{T_n + 2R_n}{3}$.