

1 Déterminer les primitives suivantes :

$$\mathbf{a}/ \int \frac{\ln t}{t} dt; \mathbf{b}/ \int \cos t \sin t dt; \mathbf{c}/ \int \tan t dt; \mathbf{d}/ \int \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx; \mathbf{e}/ \int x \arctan(x) dx;$$

$$\mathbf{f}/ \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt; \mathbf{g}/ \int \frac{x}{\cos^2(x)}; \mathbf{h}/ \int e^t \cos t dt; \mathbf{i}/ \int \frac{x^2}{\sqrt[4]{(x^3+1)^3}} dx; \mathbf{j}/ \int (2x+3)^5 x dx; \mathbf{k}/ \int \frac{x dx}{x^2+x+1}.$$

2 Déterminer les primitives suivantes en intégrant par parties :

$$\mathbf{a}/ \int t \arctan t dt; \mathbf{b}/ \int t \sin^3 t dt; \mathbf{c}/ \int (t-1) \sin t dt; \mathbf{d}/ \int (t^2-t+1) e^{-t} dt.$$

3 Calculer les intégrales suivantes :

$$\mathbf{a}/ \int_0^1 \ln(1+t^2) dt; \mathbf{b}/ \int_1^e t^n \ln t dt; \mathbf{c}/ \int_0^1 \arctan t dt; \mathbf{d}/ \int_0^{1/2} \arcsin t dt; \mathbf{e}/ \int_0^{2\pi} \cos(mt) \sin(nt) dt$$

$$(m, n \in \mathbb{N}); \mathbf{f}/ \int e^x \cos(2x) dx; \text{ en déduire } I = \int_0^{\pi/2} e^x \cos^2 x dx \text{ et } J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin^2 x dx.$$

4 Déterminer les primitives suivantes en utilisant le changement de variables indiqué :

$$\mathbf{a}/ \int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} (u = \sqrt{t}); \mathbf{b}/ \int \frac{\ln t dt}{t + t \ln^2 t} (u = \ln t); \mathbf{c}/ \int \frac{e^{2t} dt}{e^t + 1} (u = e^t); \mathbf{d}/ \int \frac{dt}{t \sqrt{t^2 - 1}}$$

$$(u = \sqrt{t^2 - 1}); \mathbf{e}/ \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt (t = \sin u); \mathbf{f}/ \int_0^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt (u = t^2).$$

5 Calculer $\int \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt$ de trois façons : 1/ en intégrant par parties; 2/ en posant $u = \sqrt{1+t}$; 3/ en écrivant $t = (t+1) - 1$.

6 Règle de Bioche

Soit à calculer $\int F(\cos x, \sin x) dx$ où F désigne une fraction rationnelle. On utilise la

Règle de Bioche : si l'élément différentiel $\varphi(x) = F(\cos x, \sin x) dx$ est invariant par le changement de :

- * x en $-x$ on pose $t = \cos x$;
- * x en $\pi - x$ on pose $t = \sin x$;
- * x en $x + \pi$ on pose $t = \tan x$.

Si $\varphi(x)$ n'est invariant par aucune de ces transformations on pose $t = \tan(x/2)$.

Vérifier que l'on a alors : $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Dans tous les cas on se ramène à calculer la primitive d'une fraction rationnelle en t .

Exemples : $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$; $\int \frac{\tan x dx}{1 + \sin^2 x + \cos x}$.

7 On pose pour tout entier naturel n : $K_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$.

1. Calculer K_0 et K_1 puis $K_n + K_{n+2}$ pour tout entier n .

En déduire l'expression de K_n en fonction de n avec un "sigma".

2. Montrer que la suite (K_n) tend vers 0. En déduire que :

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right) \text{ et} \\ \frac{\pi}{4} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

8 Suites et intégrales :

a/ Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$; trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} ;

b/ calculer $\int_0^1 x^n \ln x dx$ (on donnera un sens à cette intégrale).

9 f est une fonction continue sur un intervalle I .

1. Si f est paire sur $I = [-a, a]$ ($a > 0$) montrer que $\int_0^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt$.

En déduire que $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$. Interpréter graphiquement.

2. Si f est impaire sur $I = [-a, a]$ ($a > 0$) montrer que $\int_0^a f(t) dt = - \int_{-a}^0 f(t) dt$.

En déduire que $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$. Interpréter graphiquement.

3. Soit f périodique de période $T > 0$ sur $I = \mathbb{R}$. Montrer que $\int_a^{a+T} f(t) dt$ ne dépend pas de a (on commencera par prouver que $\int_0^a f(t) dt = \int_T^{a+T} f(t) dt$).

Interpréter graphiquement.

10 Sans calculer d'intégrales montrer que pour tout réel $x > 0$:

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Retrouver ce résultat en calculant ces intégrales.