$\boxed{1}$ **Démontrer les inégalités suivantes :**

1. x et y réels > 0 : $x + y = 1 \Longrightarrow x \ln y + y \ln x \leq -\ln 2$;
2. $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, 2x < \sin 2x + \tan x$;
3. $\forall x \in]0; 1[, \arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
4. $\forall x \in [0, \pi], \sin^2 x \leq \dfrac{4}{\pi^2} x (\pi - x)$.

$\boxed{2}$ Déterminer le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction f est dérivable et déterminer f' :

1. $f(x) = \cos(2x^2 + 1)$;
2. $f(x) = \cos(x^3)$;
3. $f(x) = \cos^3(x)$;
4. $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$;
5. $f(x) = e^{\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$;
6. $f(x) = \sqrt{xe^x + x}$;
7. $f(x) = \arccos \sqrt{x}$;
8. $f(x) = \ln |1 - x^2|$;

$\boxed{3}$ **Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes :**

1. $x \longmapsto x|x|$;
2. $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;
4. $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;
5. $f(x) = x \arctan \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;
6. $f(x) = \sqrt{1 + 2x\sqrt{1-x^2}}$;
7. $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ (on précisera l'ensemble de définition; donner une écriture simplifiée de $f(x)$).

$\boxed{4}$ **Etudier les limites des fonctions suivantes au point $\mathbf{x_0}$:**

1. $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1}$ $(x_0 = e)$;
2. $f(x) = \dfrac{\arcsin^2 x - \pi^2/16}{2x^2 - 1}$ $\left(x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
3. $\dfrac{\tan px - \sin qx}{\tan px - \tan qx}$ $(x_0 = 0, p \neq q)$;
4. $\dfrac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$ $(x_0 = 0, a, b, c, d > 0, a \neq b, c \neq d)$.

$\boxed{5}$ **Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :**

$$\forall (x,a) \in \mathbb{R}^2, |f(x+a) - f(a)| \leq x^2.$$

$\boxed{6}$ **Etudier la fonction f définie par** : $f(x) = \arccos(4x^3 - 3x)$.

$\boxed{7}$ **Calcul de dérivées n-ièmes**

1. Soient f et g deux fonctions n fois dérivables au point a. Montrer que fg est n fois dérivable au point a et que $(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)$ (*formule de Leibniz*).

2. Calculer les dérivéres n-ièmes des fonctions : xe^x; $e^{2x}(x^2 - x)$; $\cos 3x$.

3. Montrer qu'il existe a et b réels tels que :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}, \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$. En déduire la dérivée n-ième de $\dfrac{1}{x^2-1}$.

Origines du calcul différentiel : le précurseur du calcul "infinitésimal" fut Archimède. Il détermine l'aire et la longueur de diverses figures (cercle, parabole...). Mais c'est Newton qui forgea dès 1665-1666 les bases du calcul différentiel qu'il appelle le calcul des fluxions et qu'il applique à la mécanique, la mécanique céleste et à l'optique. Adepte du secret ses œuvres ne furent publiées que beaucoup plus tard (à partir de 1704). Indépendamment Leibniz fut, en France, également un précurseur; il invente les notations modernes d'intégrales et de différentielles. Une mémorable querelle s'ensuivit en 1699 entre Leibniz et les disciples de Newton, ceux-ci l'accusant de plagiat.

Le XVIIe siècle vit s'élargir le champ d'application du calcul différentiel et intégral. Mais en raison de définition imprécises des quantités infinies et infinitésimales et le recours à l'intuition géométrique des polémiques régnaient encore au sujet des fondements de ce calcul. Il faudra attendre le XIXe siècle pour que Bolzano de Cauchy définissent rigoureusement les notions de limite et de dérivée et Cauchy et Riemann celle d'intégrale.