$\boxed{1}$ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et telle que pour tout réel x on ait : $f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Montrer que si $f(I)$ est un ensemble fini alors f est constante. Donner un contre-exemple si f n'est pas continue.

$\boxed{3}$ Soit f une fonction continue d'un intervalle $[a;b]$ dans lui-même (a et b réels, $a < b$). Montrer que f a au moins un point fixe (i.e il existe $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) = x_0$). x_0 est-il unique ? (*indication* : considérer la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$).

$\boxed{4}$ Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ continue, positive et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l$ où l est un réel strictement inférieur à 1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x_0) = x_0$.

$\boxed{5}$ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Que peut-on en déduire pour les polynômes de degrés impairs ?

$\boxed{6}$ **Promenade à pied :** un homme part à pied d'un village A et se rend dans un refuge R. Le lendemain il repart de R et rentre au village par le même itinéraire. Montrer que si les heures de départ et d'arrivée sont identiques pour les deux jours il existe au moins un endroit du trajet où l'homme est passé exactement à la même heure.

Illustrer par un graphique.

$\boxed{7}$ **Promenade à vélo :** un cycliste parcourt 20 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 10 km. De même il existe un intervalle de temps de 3 mn pendant lequel il a parcouru 1 km. Interpréter graphiquement.

$\boxed{8}$ Montrer qu'à tout instant il existe sur la terre deux points aux antipodes l'un de l'autre et exactement à la même température.

$\boxed{9}$ Pour tout entier naturel n on considère l'application f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$.

1°/ Montrer que pour tout n l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution x_n appartenant à l'intervalle $]0;1[$.

2°/ Pour $x \in]0;1[$ montrer que $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. En déduire que la suite (x_n) est monotone et qu'elle est convergente. Quelle est sa limite ?

$\boxed{10}$ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ continue et injective. Montrer f est strictement monotone sur I. Comparer avec le théorème sur les fonction continues strictement monotones.

(*indication* : supposer qu'il existe x_1, x_2, x_3 dans I tels que $x_1 < x_2 < x_3$ et par exemple $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$ et raisonner par l'absurde).

Application : soit a un réel stricement positif et f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \geq a|x - y|$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{11}$ Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que, pour tout x réel positif non nul, $f(x) < x$.

1°/ Montrer que $f(0) = 0$.

2°/ Montrer que pour tout intervalle $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ il existe $M \in [0; 1[$ tel que :

$\forall x \in [a, b], f(x) \leq Mx$.

$\boxed{12}$ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$ et atteint sa borne inférieure.

$\boxed{13}$ **1**°/ Soit une fonction φ continue sur un intervalle $[a; b]$ telles que pour tout x dans $[a; b]$ on ait : $\varphi(x) > 0$. Montrer qu' il existe un réel $m > 0$ tel que pour tout x dans $[a; b]$: $\varphi(x) \geq m$. Illustrer graphiquement.

2°/ Soient f et g deux fonctions continues définies sur un intervalle $[a; b]$ telles que pour tout x dans $[a; b]$ on ait :

$f(x) > g(x)$.

Montrer qu' il existe un réel $m > 0$ tel que pour tout x dans $[a; b]$: $f(x) \geq g(x) + m$.

$\boxed{14}$ On cherche les applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et pour tout réel x : $f \circ f(x) = x$.

1°/ Montrer que f est injective. En déduire que f est strictement croissante.

2°/ En déduire que pour tout x de $[0; 1]$ on a $f(x) = x$ (*indication* : raisonner par l'absurde en supposant $f(x) < x$ puis $f(x) > x$ pour un élément x de $[0; 1]$).

Histoire des mathématiques : le théorème des quatre couleurs. En 1852 un jeune étudiant londonien, Francis Guthrie, écrivit à son frère Frédéric pour lui soumettre une énigme qu'il avait découverte en essayant de colorier une carte des comtés anglais : "est-il possible avec seulement quatre couleurs (ou moins) de colorier n'importe quelle carte, de telle façon que deux régions ayant une frontière commune ne soient jamais de la même couleur ?"

Ne parvenant pas à résoudre l'énigme, Frédéric Guthrie en parla à son professeur, l'éminent mathématicien Auguste de Morgan. Le 23 octobre 1852, dans un lettre adressée au très célèbre William Rowan Hamilton, De Morgan avouait qu'il n'avait pas progressé. Il parvint par la suite à démontrer le problème pour cinq couleurs. Ce problème des quatre couleurs est célèbre du fait qu'il a été très simple à poser et très difficile à traiter. En 1879 Arthur Kempe puis en 1890 P. J. Tait crurent le résoudre mais leur solution contenait une erreur. Des avancées notables ont eu lieu en 1968 mais il fallut attendre 1976 pour obtenir une démonstration complète. Celle-ci est inhabituelle : elle repose sur l'analyse d'environ 2000 cartes particulières où l'on montre que chacune d'elle se comporte d'une certaine manière. La vérification de tous les cas particuliers a demandé plusieurs milliers d'heures de calculs sur un ordinateur puissant. Si on devait rédiger cette démonstration le texte en serait tellement monstrueux que personne ne vivrait assez longtemps pour le lire et encore moins pour le vérifier. La question qui se pose alors est de savoir si une telle monstruosité est réellement une démonstration.