

I 1. Dans $\mathbb{R}[x]$ (espace vectoriel des fonctions polynômes) la fonction $f : x \mapsto 4x^3 + x^2 - 5$ est-elle combinaison linéaire de $g : x \mapsto x^3 + x^2$, $h : x \mapsto x^3 - x$ et $j : x \mapsto x + 1$?

2. Les fonctions $\exp$ et $f : x \mapsto \sin(2x)$ sont-elles combinaison linéaires des fonctions $\cos$ et $\sin$?

II Soit $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degrés inférieur ou égal à n . Montrer que dans $\mathbb{R}_n[x]$ un système formé de fonctions polynômes non nulles de degrés distincts deux à deux est libre.

En déduire que $n + 1$ polynômes de degrés $0, 1, \dots, n$ forment une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

III Dans $\mathbb{R}^4$ trouver le rang de la famille (a, b, c, d) et donner une relation de dépendance linéaire si cette famille est liée :

1. $a = (2, -3, 4, -1)$, $b = (1, 2, -1, 2)$, $c = (3, -1, 2, -3)$ et $d = (3, -1, -7, 0)$;
2. $a = (1, 1, 1, 1)$, $b = (0, 1, 2, -1)$, $c = (1, 0, -2, 3)$ et $d = (2, 1, 0, -1)$;
3. $a = (1, 0, 1, 0)$, $b = (2, 1, 0, 1)$, $c = (0, 2, -1, 1)$ et $d = (3, -1, 2, 0)$;
4. $a = (1, 0, 2, 3)$, $b = (7, 4, -2, -1)$, $c = (5, 2, 4, 7)$ et $d = (3, 2, 0, 1)$.

IV Mêmes questions dans $\mathbb{R}[x]$, espace vectoriel des fonctions polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour la famille :

$$S = (x^3 + 2x^2 - x; x^2 - 4x - 1; 2x^3 + 2x; x^2 - 3x - 1; 3x^3 + 2x^2 - 5x; 7x + 1).$$

V Trouver le rang, une base et la dimension du noyau et de l'image des applications linéaires f définies par :

$$1. f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ qui à } (x, y, z) \text{ associe } (x', y', z') \text{ tel que } \begin{cases} x' = 2x + 2y - 2z \\ y' = x - 3y + 11z \\ z' = -3x + 4y - 18z \end{cases};$$

2. $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f(e_1) = e'_1 - 2e'_2 + e'_3$, $f(e_2) = 2e'_1 + 2e'_2 - 3e'_3$, $f(e_3) = 3e'_1 - e'_2 + 3e'_3$, $f(e_4) = -3e'_1 + e'_2 - 2e'_3$ où (e_1, e_2, e_3, e_4) et (e'_1, e'_2, e'_3) sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$;

3. $f : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ qui à P associe P' ($\mathbb{R}_n[x]$ est l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n).

VI Vérifier que le système de vecteurs S est libre et calculer les coordonnées de x dans la base S :

1. dans $\mathbb{R}^3$: $S = (a, b, c)$ avec $a = (-1, 1, 1)$; $b = (1, -1, 1)$; $c = (1, 1, -1)$ et $x = (2, 3, -1)$;
2. dans $\mathbb{C}^3$: $S = (a, b, c)$ avec $a = (1, -1, i)$; $b = (-1, i, 1)$; $c = (i, 1, -1)$ et $x = (1 + i, 1 - i, i)$;
3. dans $\mathbb{R}^4$: $S = (a, b, c, d)$ avec $a = (1, 2, -1, 2)$; $b = (2, 3, 0, -1)$; $c = (1, 2, 1, 4)$; $d = (1, 3, -1, 0)$ et $x = (7, 14, -1, 2)$.

VII Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x))$ soit une base de E .

Généraliser à un espace vectoriel de dimension n .

VIII Soit $E = M_{\mathbb{R}}(n, n)$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{R}$, S l'ensemble des matrices symétriques de E et A l'ensemble des matrices antisymétriques de E .

1. Montrer que S et A sont des sous-espaces vectoriels de E . En donner une base et leur dimension.

2. Montrer que $E = S \oplus A$.

IX Soient a et b deux réels donnés, a et b non nul, et S l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n(*).$$

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $l(\mathbb{N})$ des suites réelles.

2. Soit φ l'application de S dans $\mathbb{R}^2$ qui à $(u_n) \in S$ associe (u_0, u_1) .

a. Montrer que φ est un isomorphisme de S dans $\mathbb{R}^2$.

b. En déduire la dimension de l'espace vectoriel S .

3. a. Montrer que si $a^2 + 4b > 0$ il y a deux suites géométriques (r_1^n) et (r_2^n) non nulles éléments de S .

Montrer que la famille constituée de ces deux suites est libre.

En déduire une base de S . Comment s'écrit un élément quelconque de S ?

Exemple : trouver le terme général de la suite vérifiant : $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.

b. Montrer que si $a^2 + 4b = 0$ il y a une suite géométrique non nulle (r^n) éléments de S .

Montrer que la suite (nr^n) appartient à S .

En déduire une base de S et donner le terme général d'un élément de S en fonction de n et r .

Exemple : trouver le terme général de la suite vérifiant : $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

c. Soit S' l'ensemble des suites complexes vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Montrer que si $a^2 + 4b < 0$ il y-a deux suites géométriques non nulles (r^n) et $(\bar{r}^n)$ (avec $r \in \mathbb{C}$) éléments de S' .

En posant $r = \rho e^{i\alpha}$ ($\rho > 0$ et $\alpha \neq 0(\pi)$) en déduire deux suites réelles éléments de S .

Comment s'écrit alors un élément quelconque de S ? Calculer le terme général d'un élément de S en fonction de n, ρ et α .

Exemple : trouver le terme général de la suite vérifiant : $u_0 = 1, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n$.

Application : de combien de façon peut-on vider un tonneau de 30 litres en utilisant un récipient de 1 litre et un de 2 litres ?

Géométries non euclidiennes : le livre *Eléments d'Euclide*, vers le IV^e siècle av. J-C, est la première synthèse de la géométrie. A côté des définitions et des propriétés considérées comme évidentes il y a des demandes ou postulats, qui sont des résultats que l'on demande d'admettre en attendant qu'ils soient démontrés. Le plus célèbre d'entre eux est le postulat des parallèles : par un point on peut mener exactement une parallèle à une droite donnée. Après 2000 ans d'efforts pour essayer de le prouver il est apparu que ce résultat ne peut être démontré à l'aide des autres axiomes de la géométrie. Si on remplace ce postulat par la possibilité de mener une infinité de parallèles à une droite donnée ou alors aucune on obtient un ensemble cohérent et non contradictoire : dans le premier cas on a la géométrie de Lobatchevski et dans le second la géométrie de Riemann. On pensait ces théories n'étaient que des constructions intellectuelles sans intérêt jusqu'à ce que la géomètre de Riemann trouve une application éclatante dans la théorie de la Relativité Générale d'Einstein (1915).