I Si f et g sont des endomorphismes de E montrer que $f \circ g = 0 \Longleftrightarrow \ker f \supset \operatorname{Im} g$.

II Montrer qu'une application f de dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe (x', y') est linéaire ssi il existe des réels $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ tels que : $\left\{ \begin{array}{l} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \alpha' x + \beta' y \end{array} \right.$.

Trouver de même l'écriture analytique d'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$; de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Généraliser à une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

III Soit $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ipt} dt$ pour $p \in \mathbb{Z}$.

2. Soit $f_p : t \longmapsto e^{ipt}$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

Montrer que la famille $(f_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est une famille libre de E.

IV **1.** Montrer que le système de fonctions $(\sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x)$ est libre dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Soient n réels $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Montrer que les familles suivantes de fonctions sont libres dans $F(I, \mathbb{R})$ (espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{R}$) :

(i) $f_i : x \longmapsto e^{a_i x}$ $(I = \mathbb{R})$;

(ii) $g_i : x \longmapsto x^{a_i}$ $(I = \mathbb{R}_+^*)$.

V Montrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(1, 0) = (1, 2, 3)$ et $f(0, 1) = (2, 1, 3)$.

Calculer $f(x, y)$.

Même questions avec g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que : $g(1, 1) = (2, 1)$ et $g(-1, 1) = (3, 0)$.

VI Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme défini par $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = e_1$.

Un réel a étant donné trouver l'ensemble V_a des vecteurs x et $\mathbb{R}^3$ tels que $u(x) = ax$.

VII Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E.

Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3$ et $f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$.

1. Justifier l'existence et l'unicité de f.

2. Déterminer $\ker(f - Id_E)$ et en donner une base.

3. Déterminer $\ker(f^2 + Id_E)$ et en donner une base.

4. Montrer que $\ker(f - Id_E) \cap \ker(f^2 + Id_E) = \{0_E\}$.

En déduire que $E = \ker(f - Id_E) \oplus \ker(f^2 + Id_E)$.

Montrer que la réunion des deux bases des questions 2/ et 3/ constitue une base de E. Trouver l'image par f^2 des vecteurs de cette base.

$\boxed{\text{VIII}}$ Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u=(0,1,1)$, $v=(1,0,1)$ et $w=(1,1,0)$.

La famille (u,v,w) forme t-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Si oui quelles sont les coordonnées du vecteur $(2,3,1)$ dans cette base ?

$\boxed{\text{IX}}$ Montrer que la famille $(x(x-1), x(x-2), (x-1)(x-2))$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Déterminer les coordonnées d'un élément quelconque de $\mathbb{R}_2[x]$ dans cette base.

Application : déterminer le polynôme P de degré ≤ 2 tel que $P(0)=0,5$, $P(1)=0,127$ et $P(2)=-0,5$.

$\boxed{\text{X}}$ Dans E_3 ensemble des vecteurs de l'espace orienté, soit f l'application de E_3 dans E_3 qui à un vecteur $\overrightarrow{x}$ associe le vecteur $\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{a}$, où $\overrightarrow{a}$ est un vecteur fixé de E_3 non nul.

Montrer que f est linéaire et trouver $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

$\boxed{\text{XI}}$ Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le sous-ensemble

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x=2\alpha-\beta,\, y=\alpha+3\beta,\, z=-\alpha\right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En déterminer une base.

$\boxed{\text{XII}}$ Soit $M_{a,b}=\begin{pmatrix} a & -b+a & 0 \\ -a+b & 3b & -2a \\ a & b & a+b \end{pmatrix}$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Soit E l'ensemble des matrices $M_{a,b}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_{\mathbb{R}}(3,3)$ et en donner une base.

$\boxed{\text{XIII}}$ Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. Montrer que $g\circ f=0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f\subset\ker g$.

2. Montrer que $\operatorname{Im}(f+g)\subset\operatorname{Im} f+\operatorname{Im} g$ et que $rg(f+g)\leq rg(f)+rg(g)$.

3. On suppose dans cette question que $g\circ f=0$ et que $f+g=Id_E$.

Montrer que $\operatorname{Im} f=\ker g$.

Calculer $rg(f)+rg(g)$ en fonction de n.

Qu'est qu'une belle démonstration ?

- "On peut faire la différence entre une démonstration belle ou pas belle ? demanda t-elle.
- Bien sûr que oui déclara le professeur. Une démonstration véritablement juste forme un équilibre harmonieux entre la souplesse et une solidité à toute épreuve. Il existe tout un tas de démonstrations qui, même si elles ne sont pas fausses sont ennuyeuses, grossières et irritantes. Vous comprenez ? De la même façon que personne n'est capable d'expliquer pourquoi les étoiles sont belles, c'est difficile d'exprimer la beauté des mathématiques".

A quoi servent les mathématiques ?

"C'est justement parce que cela ne sert à rien dans la vie réelle que l'ordre des mathématiques est beau. Même si la nature des nombres premiers est révélée, la vie ne devient pas plus aisée, on ne gagne pas plus d'argent. Bien sûr on a beau tourner le dos au monde, on peut sans doute trouver autant de cas que l'on veut pour lesquels les découvertes mathématiques ont fini par être mises en pratiques dans la réalité. Les recherches sur les ellipses ont donné les orbites des planètes, la géométrie non euclidienne a produit les formes de l'univers selon Einstein. Les nombres premiers ont participé à la guerre en servant de base aux codes secrets. C'est laid. Mais ce n'est pas le but des mathématiques. Le but des mathématiques est uniquement de faire apparaître la vérité".

Yoko Ogawa – La formule préférée du professeur