$\boxed{1}$ Soient F et G deux sous-espaces affines d'un espace affine E, de direction $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$.

1. Montrer que si $F \cap G \neq \varnothing$, et si $A \in F \cap G$ alors $F \cap G = A + \overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$.

2. Montrer que si $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$ alors $F \cap G$ est réduit à un point.

$\boxed{2}$ **1.** Dans l'espace trouver une équation paramétrique de la droite D passant par $A\,(1,-1,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2,1,1)$.

Trouver une équation paramétrique et une équation cartésienne du plan P passant par les points $B\,(1,0,-1)$, $C\,(2,1,0)$, $E\,(1,1,3)$. Trouver l'intersection de D et de P.

2. Trouver l'intersection des deux plans P_1 et P_2 d'équations respectives $x-2y+z+1=0$ et $3x+2y-z+1=0$.

Calculer l'angle de ces deux plans (défini par $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n'}}\right)$ où $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont des vecteurs normaux à P_1 et P_2.

$\boxed{3}$ **1.** Montrer qu'une application affine conserve le barycentre (i.e. si G est le barycentre d'un système $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors $f\,(G)$ est le barycentre du système $(f\,(A_i)\,, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$).

Démontrer la réciproque.

2. Soit un point O d'un espace affine E. Montrer que toute application affine f s'écrit $f = t \circ g$ où t est une translation et g une application affine telle que $g\,(O) = O$.

3. Déterminer la nature des applications affines de formules analytiques (dans un repère affine) :

$$\textbf{a/} \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 2x-2y+1 \\ y' & = & x-y+1 \end{array} \right. ; \textbf{b/} \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & \frac{x}{3} - \frac{2}{3}y + \frac{5}{3} \\ y' & = & -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \end{array} \right. .$$

$\boxed{4}$ **Fonction vectorielle de Leibniz et barycentres**

Soient (A_k, α_k) $(1 \leq k \leq n)$ n points massifs.

1. Si $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$ soit G est le barycentre du système $(A_k, \alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$.

Simplifier la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MA_k}$ à l'aide du barycentre G du système (A_k, α_k) (M est un point quelconque).

Dans le cas où $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$ montrer que le vecteur $\overrightarrow{V} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MA_k}$ est *indépendant du point* M.

2. Applications : Soit $ABCD$ un carré.

a/ Construire le barycentre G du système $(A,2)$, $(B,-1)$, $(C,1)$.

b/ Construire l'ensemble Γ des points M tels que $\left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{AD} \right\|$.

c/ Soit f l'application qui au point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Quelle est la nature de f ?

$\boxed{5}$ **1.** Soit ABC un triangle. Déterminer l'ensemble des points M tels que

$$\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0.$$

2. Dans l'espace trouver l'ensemble des points M tels que

$$\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=\overrightarrow{0}.$$

Même question avec $\left(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=\overrightarrow{0}.$

$\boxed{6}$ **Isométries.**

1. Dans le plan quelle est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites D_1 et D_2 ? Même question dans l'espace.

2. Dans l'espace quelle est la composée de deux réflexions de plans P_1 et P_2 ?

3. Quelle est la composée de deux rotations (affines) du plan ? Dans le cas où c'est une rotation en construire le centre.

On appelle *déplacement* (resp. *antidéplacement*) une isométrie f telle que $\det(f)>0$ (resp. $\det(f)<0$).

4. Quels sont les déplacements du plan ?

Montrer qu'étant donné des points A, A', B et B' des points du plan tels que $A\neq B$ et $A'\neq B'$ et $AB=A'B'$, il existe un unique déplacement f tel que $f(A)=A'$ et $f(B)=B'$.

5. Montrer que les antidéplacements du plan sont constituées des composées d'une réflexion par rapport à une droite D et d'une translation t . Monter qu'il existe une telle décomposition dans laquelle le vecteur appartient à la direction de D.

6. Montrer que les déplacements de l'espace sont les composées d'une rotation et d'une translation de vecteur parallèle à l'axe (appelés *vissage*).

7. *Exemples* : déterminer la nature des applications affines de formules analytiques (dans un repère affine orthonormé direct) : **a/** $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& -z+1 \\ y' &=& -x+1 \\ z' &=& y+1 \end{array}\right.$; **b/** $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+4 \\ y' &=& -\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-3 \\ z' &=& z \end{array}\right.$.

$\boxed{7}$ Dans le plan on considère un triangle équilatéral ABC de côté a.

1. Déterminer les réels b et c pour que le point D, symétrique de B par rapport à la droite (AC), soit barycentre de $(A,1)$, (B,b), (C,c).

2. Soit k un réel. Etudier, suivant les valeurs de k, l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2-MB^2+MC^2=ka^2.$$

$\boxed{8}$ Dans le plan soit un triangle ABC. On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles équilatéraux CBA', ACB' et BAC', et de centres respectifs I, J et K.

1. Trouver la nature de la composées $R_{I,2\pi/3}\circ R_{J,2\pi/3}\circ R_{K,2\pi/3}$ (rotations de centre I, J, K d'angle $2\pi/3$).

2. Montrer que le triangle IJK est équilatéral.