

E désigne un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

1 Pour tous vecteurs x et y de E montrer que :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ ssi } x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux (Théorème de Pythagore).}$$

2 Soit p la projection sur un sous-espace vectoriel F de E et parallèlement à un sous-espace vectoriel G .

Montrer que l'on a : $\forall x \in E : \|p(x)\| \leq \|x\|$ si et seulement si p est une projection orthogonale.

(Indication : pour λ réel et x_1 et x_2 appartenant à F et G respectivement écrire :

$$\|p(x_1 + \lambda x_2)\|^2 \leq \|x_1 + \lambda x_2\|^2).$$

3 Soit F un sous-espace vectoriel euclidien E de . Montrer que $F \subset F^{\perp\perp}$.
En déduire que $F = F^{\perp\perp}$.

4 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1, 1]$ muni du produit scalaire défini par : $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt$.

Soit $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ les sous-espaces vectoriels de E des fonctions impaire et paires.

1. Montrer que $E = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$.

2. Quel est l'orthogonal de $\mathcal{I}$? de $\mathcal{P}$?

5 Soit F un sous-espace vectoriel de E . Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F .
Soit p la projection orthogonale sur F . Montrer que pour tout vecteur x de E on a :

$$p(x) = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Application numérique : dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée trouver les formules analytiques et la matrice de la projection orthogonales sur le plan d'équation $x - 2y + z = 0$. On commencera par trouver une base orthonormée de ce plan.

6 **1.** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n . Soient $n + 1$ nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ deux à deux distincts. Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \sum_{k=0}^n f(a_k) g(a_k)$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Dans le cas où $n = 2$ et $a_0 = -1, a_1 = 0$ et $a_2 = 1$ trouver une base orthonormée de E .

7 Dans un espace vectoriel euclidien E de dimension 3 montrer que si a et b sont deux vecteurs distincts de même norme il existe une unique réflexion s telle que $s(a) = b$.

Application numérique : E étant muni d'une base orthonormée trouver les formules analytiques de la réflexion échangeant les vecteurs $a(1, -1, 2)$ et $b(2, 1, 1)$.

8 1. Dans E de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe B quelle est la nature de l'application f définie par :

$$f(\vec{x}) = \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle \vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{x},$$

$\vec{u}$ étant un vecteur normé donné.

2. Même question pour les endomorphismes dont les matrices sont $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dans la base } B.$$

9 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ ne s'annulant pas sur cet intervalle. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t) dt \times \int_0^1 \frac{1}{f(t)} dt \geq 1.$$

(Se placer dans l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt$ et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

10 1. Montrer que si u et v sont deux vecteurs unitaires, les vecteurs $u + v$ et $u - v$ sont orthogonaux.

2. Soit f un endomorphisme non nul de E qui conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E \times E, (\langle x, y \rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y) \rangle = 0).$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|.$$

(f est appelée *similitude vectorielle*).

11 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Montrer qu'il existe une base $(f_1, \dots, f_p)$ orthogonale de E vérifiant la condition :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k). (*)$$

(*indication* : supposant les vecteurs $f_1, \dots, f_{k-1}$ construits pour $k > 1$ chercher f_k sous la forme :

$$f_k = e_k + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_{k-1} f_{k-1}).$$

Comment en déduire une base orthonormée de E vérifiant la même condition $(*)$? (on dit qu'on a orthonormalisé la base $(e_1, \dots, e_n)$).

Exemple : soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$.

Orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ par le procédé de Gram-Schmidt.