

Le problème est de trouver des valeurs approchées des solutions d'une équation $f(x) = 0$ où f est une fonction, le plus souvent continue et dérivable, sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1 Séparation des zéros d'une équation

Séparer les zéros de l'équation $f(x) = 0$ c'est partager l'intervalle I en plusieurs sous-intervalles disjoints dans lesquels l'équation $f(x) = 0$ a une et une seule solution.

L'existence des solutions est établie grâce au théorème de la valeur intermédiaire et l'unicité en utilisant la stricte monotonie de f .

Observer qu'il n'est pas forcément possible d'isoler tous les zéros d'une fonction : traiter par exemple le cas où

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Exemples : isoler les zéros des équations

$$P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x - 7;$$

$$f(x) = x - e^{-x};$$

$$g(x) = x^3 - x - 1.$$

2 Principales méthodes de résolutions approchées

2.1 Méthode de dichotomie

Ecrire l'algorithme du programme calculant la solution de $f(x) = 0$ sur un intervalle donné $I = [a, b]$ avec une précision donnée ε .

Exemple : calculer à 10^{-8} près la solution de l'équation $x - e^{-x} = 0$.

2.2 Méthodes d'approximations successives

2.2.1 Principe général de la méthode

On remplace l'équation $f(x) = 0$ par une équation équivalente $g(x) = x$ et on considère la suite récurrente définie par $x_0 \in I$ et $x_{n+1} = g(x_n)$. Si la suite (x_n) converge (*ce qui n'est pas toujours le cas*) vers α alors α vérifie $g(\alpha) = \alpha$ (si g est continue) et donc α est solution de $f(x) = 0$.

Montrer qu'une condition suffisante de convergence de (x_n) est que l'intervalle I soit stable par g (i.e $g(I) \subset I$), que g soit de classe C^1 sur I et que $\sup_{x \in I} |g'(x)| \leq k$ avec $k \in [0, 1[$.

2.2.2 Méthode de la tangente (ou de Newton)

Montrer que la tangente au point $M(t, f(t))$ à la courbe d'équation $y = f(x)$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse

$$x = t - \frac{f(t)}{f'(t)}.$$

Expliquer comment on construit graphiquement la suite (x_n) définie par $x_0 \in I$ et :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

2.2.3 Méthode de la sécante (ou de Lagrange)

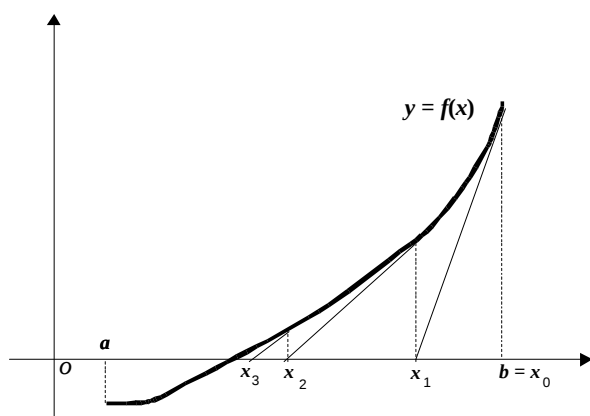
Montrer que la sécante (MB) (avec $B(b, f(b))$ et $M(t, f(t))$), à la courbe d'équation $y = f(x)$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse

$$x = t - f(t) \frac{t - b}{f(t) - f(b)}.$$

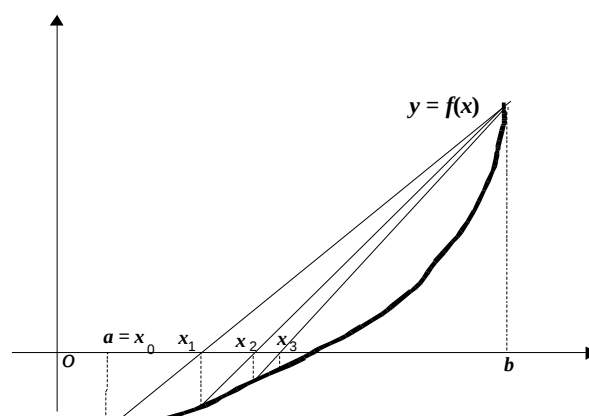
Expliquer géométriquement la construction de la suite (x_n) définie par $x_0 \in I$ et :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)}.$$

(Remarquer l'analogie avec Newton : $f'(x_n)$ est remplacé par $\frac{f(x_n) - f(b)}{x_n - b}$).



METHODE DE LA TANGENTE



METHODE DE LA SECANTE

Employer les trois méthodes pour les équations :

$$x^3 + x - 1 = 0, \quad x - e^{-x} = 0, \quad x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0.$$