$\boxed{1}$ **Calculer les déterminants**

1. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$; **2.** $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos 2\alpha \\ 1 & \cos\beta & \cos 2\beta \\ 1 & \cos\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$; **4.** $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{vmatrix}$; **6.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$.

$\boxed{2}$ **1.** Comment varie un déterminant si on écrit toutes ses colonnes dans l'ordre inverse ?
2. Une matrice nilpotente a un déterminant nul.
3. Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle d'ordre trois n'est pas inversible.

$\boxed{3}$ **1.** Dans un espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base trouver une équation cartésienne du plan P_1 engendré par les vecteurs $(1,-2,3)$ et $(4,-2,1)$.

Trouver son intersection avec le plan P_2 d'équation cartésienne $x+2y-5z=0$.

2. Montrer que tout plan vectoriel a pour équation cartésienne $ax+by+cz=0$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

$\boxed{4}$ Pour x réel on pose $D_n(x)=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix}$ (n lignes et n colonnes).

1. Calculer $D_n(x)$.

2. En déduire la valeur du déterminant $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

$\boxed{5}$ **Déterminants de Vandermonde**

Soient n réels distincts deux à deux x_1, x_2,..., x_n.

On note $D(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

Soit $P(x)=D(x,x_2,\ldots,x_n)$.

Montrer que P est un polynôme. Préciser son degré, ses racines et son terme de plus haut degré. En déduire sa factorisation. En déduire que $D(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod\limits_{\substack{i>j\\ i,j=1,\ldots,n}}(x_i-x_j)$.

$\boxed{6}$ **Déterminants circulants**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ $(j = e^{2i\pi/3})$.

Montrer que $\det J \neq 0$. Calculer AJ et en déduire $\det A$.

$\boxed{7}$ Soit $M = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre $n = 2$ ou 3. Soit $M_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de M en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne et posons $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \det M_{i,j}$.

La matrice $\mathrm{Co}(M) = (A_{i,j})$ s'appelle *comatrice* de M.

1. Montrer que $M.{}^t\mathrm{Co}(M) = {}^t\mathrm{Co}(M)\,.M = \det M.I_n$.

2. En déduire que si M est inversible on a

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,{}^{t}Co\,(M)}.$$

Exemple : calculer M^{-1} pour $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

$\boxed{8}$ Soit M un point intérieur à un triangle ABC. Soient S_A, S_B et S_C les aires des triangles MBC, MAC et MAB.

1. Montrer que M est barycentre de (A, S_A), (B, S_B), (C, S_C).

2. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Montrer que I est barycentre de (A, a), (B, b), (C, c) où on pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Historique : les systèmes de n équations linéaires à n inconnues sont étudiés dès le milieu du XVIIe siècle. Cramer décrit explicitement les formules donnant la solution sous forme du quotient de deux expressions qui porterons après Cauchy le nom de déterminant. Celui-ci donnera la formule générale définissant le produit de deux déterminants.