

1 Algorithme d'Euclide

Si a et b sont des entiers naturels non nuls on note $Div(a, b)$ l'ensemble des diviseurs communs de a et b et $Div(a)$ l'ensemble des diviseurs de a .

1. Montrer que si a et b sont deux entiers naturels non nuls et q et r le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b .

Montrer que $Div(a, b) = Div(b, r)$.

2. On effectue les divisions successives suivantes :

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1; & r_1 < b \\ b &= r_1q_2 + r_2; & r_2 < r_1; \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3; & r_3 < r_2; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Montrer qu'on obtient un reste nul après un nombre fini de divisions.

Si r_n est le dernier reste non nul on a :

$$\begin{aligned} r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n; & r_n < r_{n-1}; \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1}. \end{aligned}$$

Montrer que r_n est le pgcd de a et b et que $Div(a, b) = Div(r_n)$.

3. Dédurre de 2/ que a et b sont premiers entre eux ssi il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$ua + vb = 1 \quad (\text{Théorème de Bezout}).$$

Exemple : trouver deux entiers relatifs u et v tels que $327u + 241v = 1$.

4. Dédurre de 3/ si a , b et c sont trois entiers naturels non nuls on a :

$$\mathbf{a/} \left\{ \begin{array}{l} a|bc \text{ et} \\ a \wedge b = 1 \end{array} \right. \implies a|c \quad (\text{théorème de Gauss}).$$

$$\mathbf{b/} \left\{ \begin{array}{l} a \wedge b = 1 \text{ et} \\ a \wedge c = 1 \end{array} \right. \implies a \wedge bc = 1.$$

5. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $11x + 56y = 12$.

2 En utilisant la décomposition d'un entier en produit de nombres premiers, montrer que si $n \in \mathbb{N}$ n'est pas un carré, alors $\sqrt{n}$ n'est pas rationnel.

3 Dans un sac se trouvent 5 jetons verts numérotés de 1 à 5 et 4 jetons rouges numérotés de 1 à 4.

1. On tire *successivement sans remise* 3 jetons du sac. Trouver le nombre :

a. de tirages possibles; **b.** de tirages ne contenant que des jetons verts; **c.** de tirages ne contenant aucun jeton vert; **d.** de tirages contenant au plus 2 jetons verts; **e.** de tirages contenant exactement un jeton vert et un jeton numéroté 2.

2. Mêmes questions avec un tirage *simultané* de trois jetons.

3. Mêmes questions avec un tirage *successif avec remise* de trois jetons.

4 Dans un jeu de 32 cartes, combien peut-on choisir de "mains" de 5 cartes contenant :

a. exactement un roi; b. au moins un roi; c. exactement un roi et deux dames; d. l'as

de pique et au moins deux trèfles; e. exactement 2 carreaux, 1 trèfle et 1 coeur; f. 1 roi ou un trèfle au moins.

5 Le code secret d'un coffre-fort est composé de six chiffres. Tous les chiffres de 0 à 9 sont possibles. Les répétitions sont autorisées et le code tient compte de l'ordre. Par exemple 111222 et 222111 sont deux codes possibles distincts.

1. Combien y a-t'il de codes possibles ?

2. Combien y a-t'il de codes dont tous les chiffres sont différents ?

3. Combien y a-t'il de codes ayant exactement deux chiffres différents qui apparaissent trois fois chacun (comme 112122 par exemple) ?

4. Combien y a-t'il de codes ayant exactement trois chiffres différents qui apparaissent deux fois chacun (comme 123312 par exemple) ?

5. Combien y a-t'il de codes ayant deux chiffres identiques et les quatre autres différents (comme 231541 par exemple) ?

6 On dispose de 10 boules numérotées et de trois urnes A, B et C . On répartit comme on veut les boules dans les urnes, certaines pouvant rester vides. Calculer le nombre de

a. répartitions possibles ?

b. de répartitions laissant vide les urnes A et B ?

c. de répartitions laissant l'urne A vide ?

d. de répartitions laissant au moins une urne vide ?

e. de répartitions ne laissant aucune urne vide ?

7 On veut mettre 7 prospectus dans 10 boîtes numérotées. Combien y a-t'il de façons de procéder si :

1. on met au plus un prospectus par boîte de les 7 prospectus sont identiques;

2. on peut mettre un nombre quelconque de prospectus par boîte et les 7 prospectus sont identiques;

3. Mêmes questions si les prospectus sont tous différents.

8 1. Montrer que pour tous entiers naturels n et p tels que $1 \leq p \leq n$ on a :

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

En déduire la somme $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

2. Retrouver ce résultat en considérant la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^n$.

3. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

9 Pour n entier naturel, démontrer que : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$,

de deux façons :

1. en écrivant $(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$;

2. en calculant de deux façons le nombre de parties d'un ensemble à $2n$ éléments (pour l'une des façons, écrire E comme réunion disjointe de deux parties à n éléments).

10 1. Calculer le nombre d'applications d'un ensemble ni à p éléments dans un ensemble ni à n éléments.

2. Calculer le nombre d'injections d'un ensemble ni à p éléments dans un ensemble ni à n éléments.

3. Calculer le nombre de bijections d'un ensemble ni à p éléments dans un ensemble ni à n éléments.

11 Soit E un ensemble fini à n éléments et p un entier compris entre 0 et n .

1. Montrer que le nombre de parties de E à p éléments (appelées aussi *p-combinaisons*) est égal à $\binom{n}{p}$.

2. Montrer que $\binom{n}{p} = \binom{n-p}{p}$ de deux façons :

a. par le calcul;

b. en considérant l'application de $P(E)$ dans lui-même qui à une partie de E associe son complémentaire.

3. Montrer que $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (pour $0 < p < n$) de deux façons :

a. par le calcul;

b. en comptant de deux façons le nombre de parties de E à p éléments (pour l'une des façons choisir un élément particulier de E).

12 Démontrer par récurrence sur n que pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$ on a :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

En déduire la valeur des sommes $\sum_{k=1}^n k^m$ pour $k = 1, 2, 3$.