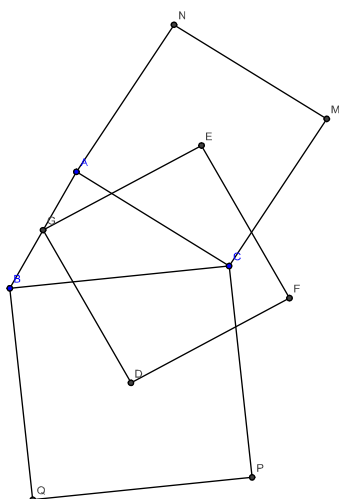


1 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ soit (C) le cercle de centre O de rayon R et A et B les points de (C) d'affixes a et b .

Montrer que pour tout point M de (C) distinct de A et B l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ garde une valeur constante modulo π .

Retrouver le théorème de l'angle inscrit.

2 On construit à l'extérieur d'un triangle ABC les carrés $BCPQ$ et $ACMN$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On note D et E les centres respectifs de ces carrés. On note G le milieu de $[AB]$ et F le milieu de $[MP]$.

Soient a, b et c les affixes des points A, B et C .

Calculer les affixes g, p, m, e, d et f des points G, P, M, D et F en fonction de a, b et c .

Montrer que $EGDF$ est un carré. (dev 12, 2012-2013)

3 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dans le sens direct.

On construit à l'extérieur de $ABCD$ les triangles ABI , BCJ , CDK et ADL rectangles et isocèles en I , J , K et L respectivement.

1. Montrer que $(IK) \perp (JL)$ et $IK = JL$.

2. Si les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux et de même norme comparer $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{JL}$ et $\overrightarrow{BD}$. Trouver l'écriture complexe de la similitude directe qui transforme I en B et K en D .

Préciser son centre.

4 Soit ABC un triangle direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles équilatéraux BCP , ACQ et ABR . Soient I , J et K leur centre respectifs.

1. Montrer que IKJ est un triangle équilatéral.

2. Montrer que $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \vec{0}$. En déduire que les triangles ABC et PQR ont même centre de gravité.

3. Montrer que $AP = BQ = CR$.

5 Soient deux nombres complexes z_1 et z_2 de module 1.

1. Montrer que $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel ≥ 0 . Dans quel cas est-il nul ?

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O soient A et B les points d'affixes a et b , tels que les points O , A et B ne soient pas alignés. Calculer l'affixe z_I du barycentre I de $(A, |b|)$ et $(B, |a|)$.

3 Montrer que $\frac{z_I^2}{ab}$ est un réel > 0 . En déduire que (OI) est bissectrice de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

La conjecture de Poincaré

En mathématiques, et plus précisément en topologie, la conjecture de Poincaré, formulée pour la première fois par Henri Poincaré en 1904, porte sur la caractérisation de la sphère à trois dimensions. Jusqu'à l'annonce de sa démonstration en 2003, il s'agissait d'une conjecture topologique non résolue. Elle faisait partie des sept « problèmes du prix du millénaire » recensés et mis à prix en 2000 par l'Institut de mathématiques Clay ; en mars 2010, elle a officiellement décerné le prix correspondant à Grigori Perelman, mathématicien russe. "Un travail stupéfiant ! Un cadeau extraordinaire fait à l'humanité", s'extasie le mathématicien français Cédric Villani, lui-même décoré en août de la médaille Fields, l'équivalent du prix Nobel. "Il a décroché le Graal capable de nous éclairer un jour sur la forme de l'Univers", renchérit un spécialiste de la géométrie. Perelman a bûché seul, enfermé durant huit ans

Celui ci vient d'annoncer qu'il refusait la récompense et le million de dollars offert avec le prix.

Déjà en 2006, le chercheur originaire de Leningrad avait refusé lors du Congrès de Madrid, la médaille Fields, qui lui avait été décernée pour la résolution de ce même problème.

Homme discret, Grigori Perelman avait décidé d'exposer sa démonstration sur Internet. En publiant un article de 39 pages le mathématicien s'émancipait des revues scientifiques et des comités de lectures habituellement requis. Car ce romantique des mathématiques ne cherche pas la reconnaissance, plutôt un idéal d'éthique. En 1996, il avait refusé la récompense de la Société européenne de mathématiques, craignant que cette gloire soudaine ne pervertisse son travail. Professeur à l'Institut de mathématiques Steklov de Saint-Petersbourg, l'homme n'avait pas accepté les propositions d'emploi de Princeton et Stanford, après une année passée à sillonner les universités américaines. En 2003, il avait donné quelques conférences sur le théorème de Poincaré outre-Atlantique, avant de rentrer en Russie. Deux ans plus tard, dépassé par l'agitation médiatique qu'il suscite, il quitte définitivement l'institut Steklov et cesse ses recherches.

Depuis il vit en ermite, reclus avec sa mère dans un appartement modeste du quartier de Kouptchino. «Il porte toujours la même veste et le même pantalon miteux, a confié l'une de ses voisines au «Daily Mail». Il ne se coupe jamais les ongles ou la barbe. Quand il marche, il fixe le sol au lieu de regarder autour de lui». D'autres affirment que son logement, meublé uniquement d'une table et quelques tabourets cédés par d'anciens locataires, est infesté de cafards. Une description qui illustre l'archétype du fou par excellence. S'il répond aux questions de ses confrères du monde entier par messageries interposées, il fuit les journalistes.