

TdQAL1 Soit x un réel de l'intervalle $]1, 5; 3[$.

Encadrer $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ de deux façons :

1. en utilisant les propriétés des encadrements;
2. en utilisant le sens de variation de la fonction f .

TdQAL2 Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations :

1. $x \leq 2 + \sqrt{x^2 + 8x + 4}$.
2. $|x + 3| - |x - 1| = |2x + 1|$.

TdQAL3 Simplifier l'expression $A = \frac{2x^2 - 3x - 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$. Vérifier sur un graphique.

TdQAL4 Développer $(1 + k)^3$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Par un procédé "en cascade" montrer que :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Vérifier cette relation par récurrence.

TdQAL5 Soit (u_n) la suite récurrente définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{2(u_n + 1)}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$.
2. Dédire de la question précédente que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

TdQAL6 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}.$$

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 1$.

1. Montrer que si $u_0 \neq -1$ alors $u_n \neq -1$ pour tout entier naturel n .

Montrer que la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

2. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

TdQAL7 Soit la suite (x_n) définie par :

$$x_0 = 3, x_1 = 0 \text{ et } : \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n.$$

1. Calculer x_2, x_3 et x_4 .
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2 \cdot (-1)^n + 2^n$.

TdQAL8 Soit la suite (x_n) définie par :

$$x_1 = 1 \text{ et } : \forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n^n}.$$

1. Calculer x_2, x_3 et x_4 .
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < x_n \leq 1$.

TdQAL9 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2n+2}{2n+3} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}.$$

Calculs avec les "sigmas"

On rappelle que $\sum_{k=p}^q a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$. Cette somme se note aussi $\sum_{p \leq k \leq q} a_k$.

De même $\prod_{k=p}^q a_k$ ou $\prod_{p \leq k \leq q} a_k$ désigne le produit $a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_q$.

Dans cette somme ou produit l'indice de sommation k est dit *muet* : on peut le remplacer par n'importe quelle variable (sauf n).

On a les règles de calcul suivantes :

$$* \sum_i (a_i + b_i) = \sum_i a_i + \sum_i b_i;$$

$$* \sum_i \lambda a_i = \lambda \sum_i a_i \text{ et } \prod_i \lambda a_i = \lambda^m \prod_i a_i \text{ (} m = \text{nombre de facteurs du produit)}$$

si λ ne dépend pas de i ;

$$* \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_{i,j} = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p a_{i,j} \text{ et } \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^q a_{i,j} = \prod_{j=1}^q \prod_{i=1}^p a_{i,j}.$$

TdQAL10 Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^n k(k+1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$);
2. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 3ij^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$);
3. $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n i2^j$ ($n \in \mathbb{N}^*$);
4. $\sum_{i,j=1}^n \min(i, j)$.