MATHS SUP
PTSI TD Accroissemnts finis (2)

$\boxed{1}$ Approximation affine d'une fonction

On veut évaluer l'erreur commise quand on remplace une fonction sur $[a;b]$ par son interpolation linéaire.

Soit g la fonction affine telle que $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$. On suppose f de classe C^2 sur $[a;b]$.

1. Montrer que pour tout x de $[a;b]$ il existe $c \in [a;b]$ tel que :

$$f(x) - g(x) = \frac{f"(c)}{2}(x-a)(x-b).$$

(*indication* : x étant fixé dans $]a;b[$ considérer la fonction θ définie par $\theta(t) = f(t) - g(t) - k(t-a)(t-b)$, k étant choisi tel que $\theta(x) = 0$).

2. Soit $M_2 = \sup\limits_{x\in[a:b]} |f"(x)|$. Justifier l'existence de M_2 et montrer que pour tout x de $[a;b]$ on a

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{M_2}{2}|x-a|.|x-b|.$$

3. En déduire que pour tout x de $[a;b]$ on a : $|f(x) - g(x)| \leq \dfrac{M_2}{8}(b-a)^2$.

$\boxed{2}$ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $\exists a \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un point M du graphique Γ de f distinct de O tel que la tangente en M à Γ passe par l'origine (*indication* : appliquer le théorème de Rolle à la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ sur $[0;a]$).

$\boxed{3}$ Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a;b]$ telle que $f(a) = f(b) \geq 0$ et pour tout x de $[a;b]$: $f"(x) \leq 0$. Montrer que pour tout x de $[a;b]$ on a : $f(x) \geq 0$.

$\boxed{4}$ Suites récurrentes

Soit f est une fonction continue d'un intervalle $[a;b]$ dans lui-même.

1. Montrer que f a au moins un point fixe dans $[a;b]$.

On considère la suite récurrente définie dans $[a;b]$ par $x_0 \in [a;b]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. On suppose que f dérivable sur $[a;b]$ et qu'il existe $k \in [0;1[$ tel que :

$$\forall t \in [a;b], |f'(t)| \leq k.$$

2. Soit l est un point fixe de f.

Montrer que, pour tout entier naturel n on a :

$$|x_n - l| \leq k^n |x_0 - l|.$$

En déduire que la suite (x_n) converge vers l.

Remarque : la suite $x_n - l$ converge vers 0 plus vite qu'une suite géométrique de raison k et d'autant plus rapidement que $|f'(l)|$ est proche de 0.

Exemple : u_0 réel donné et $u_{n+1} = \cos u_n$. Peut-on étudier cette suite d'une autre façon ?

3. *Exemple de convergence lente* : soit la suite définie par : $\left\{ \begin{array}{ccc} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \frac{u_n}{(u_n+1)^2} \end{array} \right.$.

Cette suite convergente vers 0 et $u_n \sim \frac{2}{n}$.

4. *Exemple de convergence rapide* : soit la suite (x_n) définie par : $\left\{ \begin{array}{ccc} x_0 & = & 0 \\ x_{n+1} & = & \frac{x_n^2+3}{2(x_n+1)} \end{array} \right.$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $|x_{n+1} - 1| \leq \frac{(x_n-1)^2}{2}$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - 1| \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}$.

On illustrera graphiquement le comportement de ces deux suites.