

1 Inégalités : montrer que :

a. Pour tout x de $]0; 1[$: $\arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

b. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \implies \frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$;

c. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2} : b \leq a \implies \frac{a-b}{a} \leq \ln \frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}$.

2 Applications aux suites :

1. Montrer que pour tout entier $n > 0$:

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$

En déduire la nature de la suite (x_n) définie par $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et en donner un équivalent simple.

2. Montrer que pour tout réel $\alpha \in]0; 1[$ et tout entier naturel non nul n on a :

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire un équivalent simple de la suite (y_n) définie par $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1-\alpha}}$ (séries de Riemann).

3 Soit f une fonction n fois dérivable sur l'intervalle $I = [a; b]$. Montrer que si f s'annule en $n+1$ points de I alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

4 Théorème généralisé des accroissements finis

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$, dérivables sur $]a; b[$ ($a < b$), g' ne s'annulant pas sur $]a; b[$. Montrer qu'il existe un point c de $]a; b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(indication : considérer l'application $\varphi(x) = f(x) - kg(x)$, k étant un réel choisi de telle façon que φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle sur $[a; b]$).

Application. Règle de l'Hôpital : soient f et g sont deux fonctions continues dans un intervalle I (non vide et non réduit à un point), dérivables dans $I - \{a\}$ ($a \in I$) où g' ne s'annule pas, et telles que $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite l en a . Alors : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l$.

Exemples : Trouver les limites des fonctions suivantes au point désigné :

a/ $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 4x + 3}$ en 1; b/ $\frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ en 0; c/ $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ en 0.