

---

**I** Une urne contient 9 boules (4 rouges, 2 bleues, 3 vertes) identiques au toucher. Toutes les boules ont même probabilité d'être tirées.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne et on note leur couleur. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.

2. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne; puis on tire une seconde boule et on note sa couleur.

Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.

3. On adopte la règle suivante : soit  $n$  un entier naturel non nul: on gagne  $10n$  euros si les deux boules tirées sont de la même couleur et perd  $n^2$  euros dans le cas contraire.

Soit  $X$  (resp.  $Y$ ) la VA qui, à tout tirage de deux boules de l'urne selon le procédé décrit dans la première question (resp. la deuxième question), associe de gain algébrique réalisé.

a. Déterminer les espérances de  $X$  et  $Y$ .

b. Déterminer les valeurs de l'entier  $n$  telles que :

$$E(X) < 0 < E(Y).$$

**II** On considère  $n$  individus  $I_1, I_2, \dots, I_n$ .  $I_1$  reçoit une information sous la forme de « oui » ou « non », la transmet à  $I_2$ , et ainsi de suite jusqu'à  $I_n$  qui l'annonce au monde. Chaque individu transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité  $p$  et transmet le contraire avec probabilité  $1 - p$ . Les comportements des  $n$  individus sont supposés indépendants.

Calculer la probabilité  $p_n$  que l'information soit fidèlement transmise. Que se passe-t-il quand  $n$  tend vers l'infini.

**III** Vous vous promenez en forêt et vous tombez nez-à-nez avec un ours affamé. Heureusement, vous ne sortez jamais sans votre fusil, mais vous n'avez cependant que 3 cartouches en poche. Sachant qu'à chaque tir, vous avez une probabilité  $p$  d'atteindre votre objectif, c'est-à-dire de tuer l'ours, et en notant  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de tirs strictement nécessaires pour tuer l'ours, répondez aux questions suivantes.

1. Calculez  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 2)$ , et  $P(X = 3)$  en fonction de  $p$ .

2. Calculer  $P(X \leq 3)$ . Que représente cette probabilité?

3. En réalité, l'angoisse et le stress diminuent vos aptitudes au tir si bien que la probabilité d'atteindre l'ours au  $i$ -ème essai est donnée par  $p^i$ . Donnez dans ce cas  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 2)$ , et  $P(X = 3)$  et comparez ces probabilités avec celles obtenues au point 1/.

**IV** Une personne possède 4 clefs parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle les essaie au hasard en éliminant celles qui ne marchent pas. On pose  $X$  « le nombre d'essais pour ouvrir la porte ».

1. Calculer la loi de probabilité de  $X$ .

2. Calculer  $E(X)$  et  $\text{Var}(X)$ .

3. Quand il rentre ivre il essaie les clefs en les remettant à chaque fois la clef le trousseau.

Répondre aux questions précédentes dans ce cas.

**V** Un épicier reçoit un lot de pommes dont 25 % sont avariés. Il charge un employé de préparer des emballages de 5 pommes chacun. Celui-ci, négligent, ne se donne pas la peine de jeter les fruits avariés. Chaque client qui trouve, dans l'emballage qu'il achète, 2 fruits ou plus qui sont avariés, revient au magasin se plaindre.

1. Soit  $X$  le « nombre de pommes avariées dans un emballage ». Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

2. Quelle est la probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son l'épicier ?

3. Si l'épicier a 100 clients qui achètent des pommes ce jour-là, combien y aura-t-il de plaintes?

**VI** Un journaliste se voit remettre une liste de personnes à interviewer. Il doit interroger 5 personnes au moins. Les interviewés potentiels n'acceptent de parler qu'avec une probabilité de  $2/3$ , indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité qu'il puisse réaliser ses 5 entretiens si la liste compte 5 noms? Et si elle en compte 8 ?

**VII** Les ingénieurs du son préposés à la sonorisation d'un concert en plein air hésitent entre deux solutions : 4 haut-parleurs de 4000 watts chacun ou 2 hauts parleurs de 8000 watts chacun. On suppose que la probabilité qu'un hautparleur tombe en panne est égale à  $p = 0,2$  indépendamment du type de hautparleur et que les pannes se produisent indépendamment les unes des autres.

En admettant que le concert peut se dérouler avec au moins 8000 watts, quelle solution conseillerez-vous à ces ingénieurs?

**VIII** Chacun des soldats d'une troupe de 500 hommes est porteur d'une certaine maladie avec probabilité  $1/1000$ . Cette maladie est détectable à l'aide d'un test sanguin et, pour faciliter les choses, on ne teste qu'un mélange du sang des 500 soldats.

1. Quelle est la probabilité que le test soit positif, indiquant par là qu'au moins une des personnes est malade ?

2. On suppose que le test a été positif. Quelle est la probabilité que dans ce cas, plus d'une personne soit malade ?

**IX** Un jeux de dés très populaire dans les bars anglais est le chuck-a-luck. Il consiste pour la banque à jeter 3 dés. Un joueur peut parier sur n'importe quel résultat compris entre 1 et 6. Si exactement un de ces 3 dés montre le chiffre prévu, le joueur récupère sa mise plus un montant équivalent. Si 2 dés montrent ce résultat, le gain net est de 2 pour 1 ; si les 3 dés indiquent le chiffre prévu, le gain net est de 3 pour 1. Si aucun dé ne montre le chiffre choisi par le joueur, ce dernier perd sa mise.

1. Calculer l'espérance de gain lorsque l'enjeu est d'une livre.

2. Quel montant devrait recevoir le joueur si les 3 dés montrent le chiffre prévu pour que le jeu soit fair (c'est-à-dire pour que l'espérance de gain soit nulle) ?

**X** Un sac contient 100 billes : 36 sont rouges et les autres bleues. On admet que la probabilité d'obtenir un bille rouge en un tirage est  $0,36$ .

On tire 16 fois de suite une bille, en remettant à chaque fois la bille tirée dans le sac après avoir noté sa couleur. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de billes rouges tirées.

1. Calculer l'espérance  $m$ , la variance et l'écart type  $\sigma$  de  $X$ .

2. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, estimer la probabilité pour que  $|X - m| \geq 2\sigma$ .

A quelles valeurs de  $X$  cela correspond-il ?