1 Donner la définition d'une suite convergente. Démontrer l'unicité de cette limite.

2 Montrer que toute suite convergente est bornée. La réciproque est-elle vraie ?

3 Montrer que si les suites (u_n) et (v_n) tendent vers $l > 0$ et $+\infty$, alors la suite $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.

4 Montrer que si la suite (u_n) converge vers 0 et si (v_n) est bornée, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

5 Soit la suite (x_n) définie par $x_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} - 1$.

a. Représenter graphiquement cette suite.

b. Etudier sa convergence.

c. Trouver un réel a tel que la suite (y_n) définie par $y_n = x_n - a$ pour tout entier naturel n soit une suite géométrique. Calculer x_n pour tout entier n et retrouver le résultat précédent.

6 Etudier les suites récurrentes définies par **a.** $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$; **b.** $x_0 = 1/2$ et $x_{n+1} = \frac{3}{16} + x_n^2$; **c.** $y_0 \geq 0$ et $y_{n+1} = \ln(1 + y_n)$.

7 Etudier la suite (u_n) définie, pour ≥ 1, par $u_n = \underbrace{\sqrt{3 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{3}}}}_{n \text{ radicaux}}$.

8 Etudier la suite (u_n) définie, pour ≥ 1, par $u_n = 1,2525..25$ (il y a n fois '25' après la virgule).

9 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Etudier la suite (u_n) (monotonie, convergence) et en donner un équivalent (*indication* : comparer avec une intégrale).

10 Etudier la suite (R_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ (on pourra comparer R_n avec une intégrale).

11 Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ ... \ + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

12 Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum\limits_{k=0}^{n} k.k!$.

Montrer que pour tout entier naturel k on a : $(k+1)! = k.k! + k!$.

En déduire une expression simplifiée de S_n.

13 Etudier la convergence des suites grâce à un encadrement : **a.** $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ pour $n \geq 1$; **b.** $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$; **c.** $w_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$ ((*indication* : pouver que $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$ pour x convenable); **d.** $u_n = \frac{2}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} E(ka)$ pour tout $n \geq 1$ (a un réel fixé).

$\boxed{\mathbf{14}}$ Etudier la convergence de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln\, k}$(*indication* : comparer avec une intégrale).

$\boxed{\mathbf{15}}$ **1.** Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{4k^2-1} = \frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k-1}$.

2. En déduire une expression simplifiée de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$.

$\boxed{\mathbf{16}}$ **1.** Montrer que pour tout réel x on a : $e^x \geq 1 + x$.

2. En déduire que si a est un réel de l'intervalle $]0,1[$ la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + a^k\right)$ est convergente.

$\boxed{\mathbf{17}}$ **1.** Montrer que, pour tout $k \geq 1$: $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

2. En déduire que la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ est décroissante et poisitive. Conclusion ?

$\boxed{\mathbf{18}}$ Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n > 0$ par $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Montrer que les suite (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes vers la même limite. Que peut-on dire de la suite (u_n) ? Soit l sa limite. Trouver une approximation de l à 10^{-3} près.

$\boxed{\mathbf{19}}$ **a.** Soient (u_n) et (v_n) définies par :$\left\{\begin{array}{l} u_0, v_0 > 0 \text{ et} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \end{array}\right.$.

Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite. Trouver cette limite.

b. Même question avec :$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1, v_0 = 5 \text{ et} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4} \end{array}\right.$.

(*Indication* : montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 8v_n$ est constante).

$\boxed{\mathbf{20}}$ Trouver les limites et un équivalent simple des suites suivantes :

a. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$; **b.** $n^{1/n} - 1$; **c.** $\ln(n+1) - \ln(n)$; **d.** $\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; **e.** $\frac{n+1}{\sqrt{n}+\sin^2 n}$.

$\boxed{\mathbf{21}}$ Etudier la limite des suites suivantes :

a. $\frac{\sin(n^2)}{n}$; **b.** $\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ $(a > 0$ et $b > 0)$; **c.** $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$; **d.** $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$; **e.** $\frac{n+1}{\sqrt{n}+\sin^2 n}$; **f.** $n^{\frac{n+1}{n}} - (n+1)^{\frac{n}{n-1}}$.

$\boxed{\mathbf{22}}$ Etudier la limite de la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ en considérant la suite définie par $S_n' = S_n + \frac{1}{n}$.

$\boxed{\mathbf{23}}$ Montrer que les suites suivantes sont adjacentes et conclure :

a. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$; **b.** $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.